Solomon Marcus

jocul ca libertate

editura SCRIPTA

LUDICA

Descrierea CIP
a Bibliotecii Naţionale a României
MARCUS, SOLOMON
Jocul ca libertate / Solomon Marcus -
Bucureşti: Scripta, 2003
ISBN 973-8238-13-7

SOLOMON MARCUS

JOCUL CA LIBERTATE

Editura SCRIPTA
București
2003

Redactor de carte: dr. **Nicolae Rauş**
Coordonator prepress: **Adrian Antofe**
Grafică copertă: **Rodica Lomnăşan**
Tehnoredactare: **Mariana Radu**

Reproducerea, transmiterea sau difuzarea, sub orice formă sau prin orice mijloace cunoscute sau viitoare, a textelor cuprinse în volumul de faţă sunt permise numai cu acordul scris al Editurii SCRIPTA, care are toate drepturile rezervate.

© Editura SCRIPTA, 2003

Calea Victoriei nr. 39A
Bucureşti
www.scriptaonline.ro
e-mail: office@scriptaonline.ro

ISBN 973- 8238 - 13 -7

CUPRINS

Prefaţă 13

Capitolul I. JOCUL, SUB LUPĂ
Scepticismul lui Wittgenstein 15
O scurtă istorie 16
Paidia şi ludus 17
Tipuri de gândire în jocuri 18
Tudor Arghezi şi încrucişarea cuvintelor 19
Puterea combinatorie a literelor 20
Trei tipuri de jocuri de cuvinte 22
Jocuri de substituţie 23
Jocuri ale înlănţuirii 24
Jocuri ale incluziunii 25
Ambiguitate şi lapsus 27
O sinteză a jocurilor de cuvinte 28
O primă definiţie a jocului, la Huizinga 29
Un spaţiu pluridimensional al jocului 30
Lumea jocului, între sinergie şi conflict 31
Jocuri în care nu intrăm de bunăvoie 33
Jocul, ca punere în scenă 35
Metaforele jocului sunt la rândul lor jocuri 36
Joc şi cultură, la Huizinga 38
Componenta ludică a ştiinţei 39
De la descoperire la invenţie şi de la invenţie la joc 41
Structura conflictuală a modelului cognitiv 42
Dubla faţă a unor jocuri: cunoaştere şi gratuitate 43
Conway şi von Neumann în perspectivă culturală 44
Esenţa jocului este libertatea 46
Jocul ca libertate, în ştiinţă 48
Greşeala, ca preţ al creativităţii 49

Starea de vertij în ştiinţă 51
Gratuitate, constrângere şi spectacol în jocul ştiinţei 53
În labirintul semnelor, cu Umberto Eco 55

Capitolul II. GOOOOOOOOOL! FOTBALUL, SPORTUL-REGE
Metafora fotbalistică 59
De la foot-ball la fotbal 61
Fotbalul în regimul totalitar 62
Cazul lui Harald Bohr 63
Preliminarii teoretice 64
Complexitate şi finețe 66
Fotbalul, între ordine şi hazard 67
Violenţă şi strategie 69
Orfani de arbitru, de terapeut, ne refugiem în fotbal 70
Paradoxul clasamentelor 72

Capitolul III. JOCURI PARADOXALE
Paradoxul ca joc 74
Jocul păsărilor 75
Preţul suspiciunii 77
Testul surpriză 80
Jocul fără sfârşit 82
Reguli şi metareguli 84
Principiul terţului acceptat 87
Paradoxul Electra 90
La Rochefoucauld, Unamuno şi Ralea 94
Reflecţii paradoxale şi sugestii de paradoxuri la Gr. C. Moisil . . .94
Situaţii paradoxale în *Cântăreaţa cheală,* de Eugen Ionescu 97
Întrebări şi răspunsuri. Anunţul duplicitar 100
Despre principiul incertitudinii 100
Paradoxul dorinţei 101
Paradox şi eroare 102

Paradoxul atotputernicului 102
Antinomia vizitatorului unui castel 104
Hotelul imaginar 104
O carte derutantă 105
O altă carte derutantă 106
Două feluri de adjective 106
Protagoras şi tânărul avocat 107
Dilema închisorii 107
Un paradox care nu e antinomie 108
O dispută între Gardner şi Hughes Brecht 108
Două oglinzi faţă în faţă 109
Paradoxul becului 109
Seriile cu termeni pozitivi. Ahile şi broasca 110
Paradoxul obligaţiei şi permisiunii 111
Un schimb de replici din *Alice în Ţara Minunilor* 111
Un paradox al inducţiei 111
Un paradox geografic 113
Adevărul ca paradox 113
Paradoxuri ale autoînşelării 113
O întrebare a lui N. Rashevsky 114

Capitolul IV. ÎN LUMEA ŞAHULUI
Este şahul matematică? 115
Deducţia nu primează nici în şah, nici în matematică 116
Între Hermann Hesse şi Gr. C. Moisil 117
Şahul şi inteligenţa artificială 118
De la Shannon la Botvinnik 118
Şahul ca sistem formal 120
Este gândirea şahistă secvenţială sau bidimensională? 122
Limbă şi şah 123
Orizontal-vertical şi diagonal 125
Transgresarea opoziţiei perpendicular-diagonal 126

Calul – o problemă de finețe 127
Pionii – un compromis între turn și regină 128
O tentativă de axiomatizare 129
Dincolo de logic și combinatorial 130
Gândirea matematică în șah 131
Șahul computațional 132
Șahul, la congresele internaționale de cibernetică 133
Două evenimente importante 134
Pariul cu inteligența mașinii 134
Prima strategie a lui Shannon 136
Performanțe computaționale în jocul de mijloc 137
Când va deveni calculatorul un mare maestru? 138
Ziua de duminică 11 mai 1997 139

Capitolul V. JOCURILE HAZARDULUI
Cum s-a născut teoria probabilităților 141
De la Cavalerul de Méré la Pascal și Fermat 142
De la așteptare la surpriză nu-i decât un pas 143
Plauzibil, dar fals; corect, dar straniu 143
De la Bernoulli la Poincaré 144
„Fizicianul e un jucător care își evaluează șansele“ 146
Matematica la loto 147
Fascinația loteriei 148

Capitolul VI. LATURA SPORTIVĂ A MATEMATICII ELEMENTARE
Nu ducem lipsă de talente 154
Stilul Cuculescu 155
Matematică la cronometru? 157
În absența imaginației, este suprasolicitată memoria 158
Știința și arta de a întreba 159
Cum arată o problemă de inteligență 160
Putem măsura performanța matematică? 162

Este matematica de natură competitivă? 163
De la probleme de concurs la probleme pur şi simplu 164
Olimpiadele 165
Matematică şi sport 167

Capitolul VII. MATEMATICA ŞCOLARĂ ÎNTRE LUDIC, COGNITIV ŞI UTILITAR
Cum a fost contestat Euclid 170
Spre o ştiinţă accesibilă celor mulţi 172
Cearta „matematicilor moderne“ 175
Matematicienii provoacă pe fizicieni 178
Utilitatea gratuitului 181
Geometrie, nu pleca! 184
René Thom despre rigoare 187
În ce constă criza matematicii? 191
Conştientizarea nevoii de matematică 191
Inteligenţa umană şi formarea gândirii matematice 194
Atenţie la calculator! 195
Primejdii în folosirea calculatoarelor 196
Antrenamentul ludic anticipează gândirea algoritmică 197

Capitolul VIII. O VECINĂ (ŞI SORĂ) A JOCULUI: GREŞEALA
Trei feluri de greşeli 199
Greşeală şi eroare 201
Cum măsurăm gravitatea unei erori? 201
Operaţii incorecte cu rezultate corecte 202
Greşeli care sugerează teoreme 203
Greşeli celebre 205
O teorie născută din observarea unei greşeli 206
Radiografia greşelii lui Lebesgue 207
O lucrare românească despre eroarea matematică 208
Frecvenţa greşelilor şi lupta împotriva lor 210

Devine matematica o ştiinţă experimentală? 211
Pariul lui J.L. Doob 213
Terapia greşelii 215
Două zone de manifestare a greşelii 216
Greşeli de tipar benigne 218
Cum adunăm două fracţii? 220
Unde este greşeala? 221
Jonglerii algebrice 222
De la greşelile şcolarilor la cele ale maeştrilor 224
O satiră la adresa diletanţilor 225
Aspecte anecdotice 226
Capcane ale exponenţialelor şi logaritmilor 228
Inegalităţi cu sau fără module 229
Gândirea lui Euclid 230
Comentariul lui Dan Barbilian 231
Deformarea argumentului lui Euclid 233
Este curba un concept geometric? 234
Este geometria o ştiinţă? 236
Capcanele tangentei 238
Unde a dispărut leul? 239
O problemă cu o pâine 240
O problemă cu cinci pâini 241
Unde se ascunde infinitul? 241
Poate fi 2 egal cu 4? 242
„Orice triunghi este echilateral“ 242
„Orice triunghi este dreptunghic“ 243
O pereche de drepte este o... hiperbolă? 243
Inducţie abuzivă 243
sin 2x = 2 sinx? 244
2 = 3 ... = n? 244
Numărul e între *1* şi ∞ 245

O aparentă anomalie privind lungimea curbelor 245
Pentru descreţirea frunţilor 247

Capitolul IX. GRAMATICA JOCULUI DE TENIS
Competenţă şi performanţă în tenis 249
Alfabetul tenisului 250
Limbajul infinit al jocului de tenis 251
Gramatici şi automate ale jocului de tenis 253

Capitolul X (Jouko Seppänen): GAME, PLAY AND THEIR HISTORY
Concepts 256
Conceptual periodization 257
Prehistory – natural and cultural history 258
Ancient civilisations – art of warfare, Greek antiquity – military history 259
Renaissance – art and literature; new time, diplomacy, diplomatics 259
Enlightenment, politics, political science 260
History and philosophy of rights 261
Jurisprudence 261
History of law 262
Crime sciences 263
Military science and economics 264
Theory of games of chance 265
Probability theory and behavioural sciences 266
Management science and operational research 266
Mathematical game theory 267
Machine intelligence 268
Computer games, artificial life 269

Capitolul XI. GAME AND PLAY IN A SYNTHESIS

Game and play looking for their signs 271
From Plato to Cardano and from Cardano to Caillois and Brams . . .271
Typology of games. Gameness may be a matter of degree 273
Game as antinomy 274
The game of science and the game of life 276
From gratuite to cognitive and from cognitive to utilitarian 278
Game as metaphor and the metaphors of the game 279
Characters, conflicts, scenarios, strategies, paradox and imprevisibility in science 279
The chicken game and the game without end 279
Game as freedom versus game as rule 281
Summary in English 282

PREFAŢĂ

Jocul a devenit o paradigmă universală. Prezenţa sa a fost identificată în toate domeniile vieţii şi ale creaţiei. De la joc s-a trecut la metafora jocului, care şi ea este un fel de joc, deci cercul se închide. Jocul a devenit o problemă foarte serioasă şi foarte dificilă, el este departe de a fi o joacă (termen asociat cu ideea de lucru facil); pentru a da un singur exemplu, eşecurile în domeniul educaţiei se explică în bună măsură prin incapacitatea de a folosi în mod adecvat componenta ludică.

Mecanismele jocului au fost analizate din cele mai variate perspective: biologică, psihologică, matematică, sociologică, lingvistică, filozofică şi politică. Accentul a căzut mereu pe latura restrictivă, normată, de impunere a unor reguli. Totuşi, jocul este în primul rând o manifestare a libertăţii la care are dreptul fiinţa umană. De libertate avem nevoie aşa cum peştele are nevoie de apă. Aria de manifestare a acestei libertăţi, formele efective pe care libertatea le ia, modul în care ea rămâne o garanţie a stimulării capacităţii creatoare sunt aspecte ale ludicului care nu s-au bucurat de atenţia cuvenită, nu au fost suficient explicate şi analizate. Tocmai în această direcţie, oarecum neglijată, este orientată cu precădere lucrarea de faţă. De exemplu, un aspect al libertăţii ludice este dreptul de a greşi în mod repetat, greşeala fiind o condiţie a creaţiei şi, uneori, chiar o sursă de creativitate; un întreg capitol îi este dedicat. Spre deosebire de lucrările care propun diferite tipuri de jocuri, cartea de faţă este în primul rând o lucrare despre jocuri şi numai în al doilea rând o carte de jocuri. Capitolele III, V, VIII prezintă multe jocuri, dar ele nu sunt atât jocuri pe care cititorul să le practice cât jocuri pe care cititorul să le contemple, să le analizeze şi să reflecteze în continuare asupra lor. Există o ştiinţă a jocului, există de fapt mai multe ştiinţe ale jocului, unele dintre ele au o structură matematică; asupra lor ne îndreptăm atenţia. Pe de altă parte, ne preocupă nu numai ştiinţa jocului, ci şi jocul ştiinţei. Componenta ludică a

ştiinţei a cam fost neglijată, aşa cum se poate vedea în cartea lui Huizinga *Homo Iudents*, unde există capitole speciale despre formele ludice ale artei, ale poeziei, ale filozofiei, ale culturii în general, dar nu şi un examen al importanţei jocului în creaţia ştiinţifică, în predarea şi învăţarea ştiinţei.

Orientaţi spre manifestările libertăţii ludice, nu avem în vedere numai libertatea de a decide dacă să intrăm sau nu într-un anumit joc (în cele mai importante jocuri, nici măcar nu intrăm de bunăvoie), ci şi (de fapt, în primul rând) libertatea din interiorul jocului. Este nevoia fiinţei umane (şi a gândului) de a hoinări în direcţii stabilite numai de curiozitatea şi de imaginaţia sa şi fără teamă că eşecurile îi vor fi pedepsite. Acesta este jocul major în care-şi au sursa cultura şi creaţia. Regulile sale, dacă există, nu sunt formulate de la început, ca la tenis sau la şah, ci descoperite eventual pe parcurs.

Există un numitor comun al jocului cu arta şi cu matematica: faptul că fiecare dintre ele ne plasează într-un univers de ficţiune, într-o convenţie care se constituie ca o replică la universul contingent. Raţiunile acestei evadări pot fi diferite pentru fiecare dintre cele trei domenii menţionate, dar, într-o anumită măsură, ele pot fi asemănătoare. Şi această problemă intră în sfera de interes a acestei cărţi.

Capitolele X şi XI sunt redactate în limba engleză, funcţionând şi ca un rezumat. Capitolul X aparţine profesorului Jouko Seppänen de la Helsinki University of Tehnology. Acesta a răspuns invitaţiei noastre de a participa la Seminarul *Semiotics of Game and Play* pe care l-am organizat la Imatra (Finlanda), la 9 iunie 2002. Capitolul XI este contribuţia noastră la acel seminar.

CAPITOLUL I
JOCUL, SUB LUPĂ

Scepticismul lui Wittgenstein

„Să considerăm de pildă demersurile pe care le numim jocuri. Mă refer la jocul scenic, jocurile de cărţi, jocuri cu mingea, jocuri olimpice ş.a.m.d. Ce au ele toate în comun? Să nu spui: «Trebuie să aibă ceva în comun, altfel nu s-ar numi jocuri». Ci să priveşti şi să vezi dacă au ceva în comun, toate". Am reprodus o parte dintr-un avertisment adresat de Ludwig Wittgenstein în Investigaţii filozofice (după versiunea în limba română, în „Viaţa Românească", nr.5, 1987, p.69). Avertismentul îşi păstrează întreaga sa actualitate, am putea chiar spune că varietatea şi complexitatea acţiunilor desemnate prin jocuri au crescut. Aproape orice abordare a problemei ratează măcar una dintre variantele jocurilor. Până şi în *Dicţionarul explicativ al limbii române* (Editura Academiei R.S.R.,1975,p.480) trecerea în revistă a tipurilor de jocuri omite jocurile individuale de strategie (inteligenţă), atât de importante ca urmare a dezvoltării jocurilor cu ajutorul calculatorului.

Chestiunea este repusă în discuţie de Pierre Parlebas, (*Éléments de sociologie du sport*. Presses Universitaires de France, Paris, 1986), care observă că de trei secole clasificarea jocurilor a rămas în esenţă neschimbată: jocuri de inteligenţă, jocuri de semihazard şi jocuri de hazard. Este clasificarea propusă de Leibniz într-o scrisoare adresată lui Jacques Bernoulli, la 28 noiembrie 1704, dar care reapare în lucrări recente (Marc Barbut, *Jeux qui ne sont pas de pur hasard*, în „Jeux et mathématiques" (*Jeux et Sports*, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard, Paris, 1967, p.836-863); Pierre Rosenstiehl, *Jeux de pur hasard*, ibidem. p.826-835.

O scurtă istorie

Studiul jocurilor a fost marcat, de-a lungul secolelor, de nume mari ca G.Cardano (*Despre jocul de hazard*, 1565), Galileo Galilei (*Consideraţii asupra jocului de zaruri*, 1642), Christian Huygens (*Calculul în jocurile de hazard, 1657*), Pierre-Rémond de Montmort (*Încercare de analiză a jocurilor de hazard*, 1708), pentru a nu mai vorbi de tratatul lui Pascal, 1657; a se vedea Blaise Pascal, Oeuvres complètes, Gallimard, Paris, 1954 şi de cel al lui Jacques Bernoulli (*Lettre à un Ami sur les Parties du Jeu de Paume*, în „Ars Conjectandi", 1713, republicată în „Impressions anastaltiques", Culture et civilisation, Bruxelles, 1968, p. 1-35). În secolul al XX-lea se remarcă mari matematicieni ca Émile Borel (*Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes*, Gallimard, Paris, 1941; *Le hasard*, Presses Universitaires, de France, Paris, 1948) şi John von Neumann (autor, în colaborare cu Oscar Morgenstern, al celebrei lucrări *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton Univ. Press, 1944) şi alţi autori importanţi, ca: René de Possel, *Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de reflexion*, 1936 (reluată în Hervè Moulin, *Fondation de la théorie des jeux*, Hermann, Paris, 1979, p.83-120), Johan Huizinga, *Homo Iudens*, 1938, despre funcţia socială a jocului (versiune românească la Editura Univers, Bucureşti), Georges Th. Guilbaud (*Leçons sur les éléments principaux de la théorie mathématique des jeux*, în „Stratégie et décisions économiques. Études théoriques et applications aux entreprises", Éditions du CNRS, Paris, 1954; *Faut-il jouer au plus fin?* (*Notes sur l'histoire de la théorie des jeux*), în *La décision*, Éditions du CNRS, Paris, 1961, (171-182); Roger Caillois (*Les jeux et les hommes*, Gallimard, Paris, 1958); Roger Daval (*Psychologie sociale et théorie des jeux*, Centre de Documentation Universitaire, Paris, 1967), Louis-Jean Calvet (*Les jeux de la société*, Payot, Paris, 1978), pentru a nu mai vorbi de numeroasele lucrări dedicate jocului la copii (de exemplu, Jean Chateau, *Le jeu de l'enfant. Introduction à la pédagogie*, Vrin, Paris), dintre care se detaşează

investigaţia efectuată de Jean Piaget (*La formation du symbole chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, 1946), ca şi atâtea alte scrieri ale acestui autor, privind psihologia copilului).

Paidia şi Iudus

O lucrare recentă de Jeanne Bandet şi Réjane Sarazanas (*L'enfant, les jouets et les nouveaux jouets*, deuxième édition revue et augmentée, Casterman, Paris, 1982) atrage de asemenea atenţia. Este reluată aici o clasificare a jocurilor copiilor propusă de Roger Caillois în cartea sa menţionată mai sus. Jocurile sunt repartizate în patru categorii, după cum sunt dominate de competiţie, şansă, simulare sau vertij. În interiorul fiecărei categorii, jocurile sunt aşezate în ordinea de descreştere a elementului paidia (libertate, improvizaţie, sprinteneală, vacarm, agitaţie, râs necontrolat) şi de creştere a elementului ludus (joc cu gustul dificultăţii practice). Se pare că există, în materie de jocuri, o mişcare a fanteziei spre reguli care devin un adevărat instrument de cultură. În cadrul jocurilor de competiţie, ordinea indicată merge de la alergări şi lupte la atletism, apoi la box, scrimă, fotbal, dar şi biliard şi şah, competiţii sportive în general. În jocurile de şansă ordinea trece de la aruncarea banului la pariuri, ruletă, apoi diferite tipuri de loterii. În jocurile de simulare avem, în ordine, diferite imitaţii copilăreşti, jocuri de iluzie, păpuşi, măşti, travestiuri, apoi teatrul, artele de spectacol în general.

În sfârşit, în jocurile de vertij avem scrânciobul, balansoarul, călăria, schiul, alpinismul.

O altă clasificare a fost propusă de M.Borotav la cel de-al VI-lea Congres internaţional de antropologie şi etnologie, Paris, 1960. El distinge trei clase mari de jocuri: I) Jocuri verbale, imitative şi „magice", jocuri de „iniţiere"; II)Jocuri de forţă şi de adresă şi III) Jocuri intelectuale. În cadrul primei clase se disting: jocuri executate de cei mari pentru cei mici, primele creaţii ludice ale copilului în contact cu viaţa cotidiană; simple divertismente individuale sau colective, creaţii artistice şi tehnice; jocuri de hazard; jocuri rituale şi magice şi

jocuri de simulare. În cea de-a doua clasă distingem, între altele, jocurile gimnastice, acrobatice şi ritmice, jocurile de forţă propriu-zise, jocurile de forţă şi de adresă complexă. În cea de-a treia clasă avem jocurile de înşelare şi farsă, jocurile de memorie şi de gândire rapidă, jocurile geometrice şi cele combinatorii.

Tipuri de gândire în jocuri

Să reţinem deocamdată patru trăsături esenţiale în activităţile pe care le avem în vedere sub denumirea de jocuri: caracterul *agreabil*, natura *imprevizibilă*, aspectul problematic şi cel strategic. Ştiinţa nu putea să-şi refuze curiozitatea de a descifra o structură atât de complexă şi de profund umană, care intră ca o componentă obligatorie în orice activitate creatoare. Desigur, ponderea cu care participă fiecare trăsătură dintre cele patru de mai sus diferă de la un joc la altul, depinde de persoană şi de împrejurare. Dacă agreabilul rămâne deocamdată o categorie mai degrabă psihologică, pe care nu ştim încă s-o descriem într-un mod mai riguros, imprevizibilul, problematicul şi strategicul fac obiectul unor discipline ştiinţifice prestigioase ca teoria informaţiei, inteligenţa artificială şi teoria matematică a jocurilor. Conceptul de entropie, pe care fizica l-a introdus încă în secolul al XIX-lea, a devenit, printr-un transfer tipic gândirii interdisciplinare, un termen de referinţă în ştiinţele informaţiei. Entropia unui sistem măsoară gradul său de nedeterminare (deci de surpriză, de imprevizibilitate). În cadrul unui domeniu de mare perspectivă, cel al inteligenţei artificiale, la contactul informaticii cu psihologia şi ingineria, cu biologia şi lingvistica, se dezvoltă euristica, studiul activităţii de rezolvare a problemelor, de descoperire a soluţiilor. În ceea ce priveşte teoria jocurilor, ea se ocupă de adoptarea deciziilor în situaţii în care acţionează mai mulţi factori raţionali – fiecare corelat cu un anumit scop – aceşti factori fiind independenţi în alegerea deciziilor proprii, dar dependenţi prin rezultate, care depind de ansamblul tuturor deciziilor. În această teorie, se înţelege prin joc o situaţie în care acţionează o mulţime de elemente raţionale, numite jucători, care, în mod succesiv

şi independent, într-o ordine şi în condiţii specificate printr-un ansamblu de reguli, aleg câte o decizie dintr-o mulţime anumită de variante posibile. Modul de alegere a deciziilor constituie o strategie. Dintre jocurile cunoscute, probabil că şahul se apropie cel mai mult de această accepţiune strategică a jocului.

Dar jocurile pot fi privite şi altfel, anume din punctul de vedere al tipului de gândire pe care ele îl presupun şi îl stimulează. Gândirea logică, combinatorică, probabilistică, algoritmică, inductivă, analogică, lingvistică, şi de multe alte tipuri conduce, în diferite combinaţii şi proporţii, la diferite jocuri, unele atestate, altele numai virtuale. Să analizăm, din acest punct de vedere, jocul de cuvinte încrucişate. El prezintă, evident, un aspect lingvistic, presupune şi stimulează o bună cunoaştere a vocabularului. De asemenea, el solicită o gândire combinatorie (prin modul în care situaţiile pe orizontală se combină cu cele de pe verticală) şi inductivă (prin nevoia de a trece de la cunoaşterea fragmentară la cunoaşterea integrală a cuvintelor). Este necesară şi o anumită gândire strategică, pentru a stabili ordinea în care facem încercările de identificare a cuvintelor.

Tudor Arghezi şi încrucişarea cuvintelor

Dar poate că punctul de atracţie al acestui joc îl constituie gândirea semiotică, orientată spre explicarea modului în care ceva trimite la altceva. Atunci când N. Gh. Popescu-Rebus i-a propus lui Tudor Arghezi un careu de cuvinte care-şi aşteptau definiţiile (un joc se face în ordinea inversă faţă de aceea în care el se rezolvă), el a avut în vedere tocmai gândirea semiotică pe care poezia o stimulează. Să amintim o reflecţie a lui Mallarmé: „A numi un obiect înseamnă a suprima trei sferturi din plăcerea de a-l ghici puţin câte puţin ; a-l sugera, iată visul". Nu se întâlneşte aici rebusul cu poezia? Gândirea semiotică se dezvoltă, în esenţă, în două direcţii, după cum predomină analogia sau contiguitatea. Prima dă naştere metaforei, a doua metonimiei. Să deschidem volumul *Cuvinte potrivite şi încrucişate* (Tudor Arghezi, *Scrieri*, Bucureşti, Editura Minerva 1976). Explicaţii ca

„mătură de crăci“ pentru „târn“, „făină care se topeşte la Iaşi“ pentru „nea“, „ortografia emfatică şi majusculară a cuvântului „ţâr“ pentru „ţar“, „influenţa literară a poetului A.Toma“ pentru „atomică“ stau toate sub semnul analogiei, al metaforei sau, cum se spune cu un termen mai pretenţios în semiotică, al semnelor iconice. Alte explicaţii ca „umple lucrurile şi este gol“ pentru „eter“, „născut odată cu ciocanul“ pentru „cui“, „vine cu somn şi cu abdomen“ pentru „lene“, „o putere cu tobă“ pentru „fisc“ au în vedere relaţii de contiguitate, de tipul a ceea ce se înţelege în semiotică prin semne indiciale, iar în poetică prin figuri metonimice. Mai e apoi o a treia categorie de explicaţii, în care se stabileşte un echilibru între iconic şi indicial, între metaforă şi metonimie: „scoală ca să şed“ pentru „opoziţie“, „fabulă în carne şi oase“ pentru „menajerie“.

Jocul este inerent oricărei activităţi de căutare. Cine caută, are nevoie de mai multe încercări decât de găsiri, cu alte cuvinte încercările trebuie să-şi permită, în anumite limite, luxul eşecului. Această tensiune a spiritului trebuie compensată prin factori agreabili, pentru a o face suportabilă şi productivă. Aşa se naşte jocul, inerent creaţiei aşa cum valul este inerent înotului. Gândirea înaintează, prin joc, de la cunoscut la necunoscut, de la previzibil la imprevizibil, de la sigur la problematic, de la nimereală la strategie. Jocul nu se asociază facilului şi neseriosului, ci creaţiei şi sensibilităţii.

Puterea combinatorie a literelor

Jocul de cuvinte încrucişate este, după toate aparenţele, jocul cel mai răspândit. În tren, în avion, în autobuz şi în metro întâlnim mereu persoane cufundate în rezolvarea unui joc de acest fel. Puterea combinatorie a literelor, articulată cu aspectele culturale implicate în ghicirea cuvântului avut în vedere, pornind de la o informaţie incompletă, aflată într-o relaţie de contiguitate sau de analogie cu respectivul cuvânt, generează o stare de bună dispoziţie, care ne incită să ne încercăm puterile în completarea pătratelor albe cu litere corespunzătoare.

Jocul acesta comportă un compromis: unele pătrate rămân parazite, ele nu pot fi ocupate de nici o literă și marchează limita, inițială sau finală, a cuvintelor avute în vedere. Desigur, dacă suprafața de încrucișare nu este prea mare, există posibilitatea unor încrucișări fără pătrate parazite: limita, inițială sau finală, a fiecărui cuvânt este dată de limita suprafeței de încrucișare. Astfel, pentru limba română, s-a putut identifica un pătrat de dimensiune egală cu 9, în care fiecare linie și fiecare coloană sunt ocupate de cuvinte existente în limba română, deci pătratele parazite sunt complet evitate. Exemplul care urmează este datorat lui Nicolae Andrei și a apărut în revista „Rebus" din iulie 1968. Cuvintele, aceleași pe orizontală și pe verticală, sunt, în ordine, următoarele: rabatabil, anisobari, bivinilic, asimilați, tonificat, abilitată, balacarit, iritativi, licitație. Ulterior, au fost date și alte exemple de acest fel. Se observă că toate cuvintele alternează vocalele cu consoane, deci nu există consoane consecutive, nici (cu o singură excepție) vocale consecutive. După cunoștința noastră, nu se cunoaște nici un careu de dimensiune egală cu 10, în care pătratele parazite să fie total absente. S-a putut însă construi un atare careu cu numai trei pătrate parazite.

Dacă pentru cel care rezolvă un careu rebusist itinerarul parcurs este de la explicații la cuvinte, pentru cel care construiește un atare careu itinerarul este invers: de la cuvinte care ocupă, orizontal și vertical, pătrate albe ale careului la explicații cât mai ingenioase și mai surprinzătoare. Adrian Atanasiu a colecționat, din publicații rebusiste, un număr mare de explicații de acest fel, pe care le-a publicat într-un volum intitulat: *Poezia definițiilor rebusiste*.

Desigur, forma unui joc de cuvinte încrucișate nu este obligatoriu un careu, ea poate fi dreptunghiulară sau altfel. Cele mai multe jocuri sunt tematice. Calitatea unui joc de acest fel poate fi apreciată după mai mulți parametri: proporție cât mai mică de pătrate parazite (de obicei, pătrate negre), caracterul neforțat al cuvintelor folosite, încadrarea lor într-o anumită temă și o relație cât mai sugestivă între explicații și cuvintele la care ele se referă. Tudor Arghezi poate constitui în această privință un reper.

Trei tipuri de jocuri de cuvinte

Cuvintele încrucişate sunt unul dintre cele mai celebre jocuri de cuvinte, dar varietatea acestor jocuri este imensă. Ce poate fi mai natural, mai tentant, decât să încerci să te joci cu elementele unui alfabet, pe cele două axe posibile: axa alegerii şi axa combinării. Există ideea conform căreia orice act de creaţie este o alternare de alegeri şi combinări. După ce am ales anumite obiecte, ca un punct de plecare, studiem diferite combinări ale lor, care conduc la alegerea unor noi obiecte ş.a.m.d. Jocurile de cuvinte nu fac decât să prefigureze acest proces, în una dintre situaţiile cele mai familiare: aceea în care obiectele iniţiale sunt literele alfabetului. Orice exerciţiu de acest fel constituie un antrenament pentru alte posibile întreprinderi similare, dar cu finalitate semnificativă într-un domeniu de interes social. Dar chiar rămânând la cuvinte, avem în faţă un câmp infinit de posibilităţi, unde imaginaţia şi cultura noastră sunt puse la încercare şi stimulate să se îmbogăţească. În aceste condiţii, este explicabil faptul că jocurile de cuvinte sunt în atenţia multor canale de televiziune din lume. Dar şi aici, ca şi în şah, s-ar putea ca posibilităţile oferite de mijloacele electronice să aducă modificări substanţiale.

Fiecare dintre noi poate imagina şi propune un nou joc de cuvinte. Un scriitor francez a publicat un roman în care toate cuvintele încep cu litera P. Umberto Eco a propus problema găsirii unui enunţ în care fiecare literă a alfabetului apare o singură dată. El pretinde că a rezolvat problema în cazul limbii italiene. Problema pare dificilă, trebuie testate multe posibilităţi, calculatorul ne-ar putea veni în ajutor. O altă problemă apare în mod natural: Care este cel mai lung enunţ posibil în care nici o literă nu apare de mai multe ori? Sau apare de un număr fixat de ori.

În urmă cu câţiva ani, a fost dedicat un volum jocurilor de cuvinte (Gheorghe Sanda, *Enigmistica de la A la Z*). Aici însă, ne vom adresa unei alte surse, în care, mai mult decât în cartea lui Sanda, jocurile de cuvinte sunt discutate nu numai în perspectivă ludică, ci şi în perspectivă lingvistică şi poetică: Pierre Guiraud, *Les jeux de mots*, Collection

„Que sais-je?", Presses Universitaires de France, Paris, 1976. Într-adevăr, jocurile de cuvinte constituie un puternic factor stilistic, pe care nu-l putem ignora decât sărăcind potenţialul lor cultural.

Pierre Guiraud a identificat peste o sută de feluri de jocuri de cuvinte, pe care le-a repartizat în trei tipuri: jocuri de substituţie, jocuri de înlănţuire şi jocuri de incluziune.

Jocuri de substituţie

Acestea vizează în primul rând axa alegerii (axa paradigmatică, după terminologia din lingvistica structurală sau axa metaforică, după Roman Jakobson). De exemplu, se exploatează echivocul care rezultă dintr-o asemănare fonetică asociată cu un contrast semantic. Tipic în această privinţă este calamburul. Iată unul creat spontan de Şerban Cioculescu. Aflat la restaurantul Uniunii Scriitorilor, a comandat o porţie de caşcaval, dar i s-a răspuns că s-a terminat. Replica lui Şerban: „Ce e caş ca valul trece!". Calamburul se poate baza pe fenomenul de polisemie (existenţa mai multor sensuri ale aceluiaşi cuvânt). Când matematicianul Gr. C.Moisil a fost întrebat dacă e specialist în materie de vin sau numai un amator, el a răspuns: „Nu sunt deloc specialist, sunt un simplu amator, dar foarte amator". Această reluare a unui cuvânt într-o frază, dar cu un alt sens decât cel iniţial, constituie procedeul stilistic numit antanaclază, după grecescul „anaklasis", care înseamnă „repercusiune". Un alt exemplu de acest fel este faimoasa reflecţie a lui Blaise Pascal: „Inima are raţiunile ei, pe care raţiunea le ignoră".

Există calambururi care provin din segmentări diferite ale aceleiaşi expresii: titlul sadovenian *Venea o moară pe Siret* a fost citit de un elev şugubăţ: *Venea omoară pe Siret.* În această ordine de idei, să semnalăm holorimele, o extensiune a fenomenului de rimă de la cuvinte la întregi expresii sau versuri. Eminescu a rimat „Tisa" cu „plânsu-mi-s-a". În limba franceză, posibilitatea holorimelor este mai mare decât în română, putem menţiona exemplul celebru:

Galamment de l'arène à la Tour Magne à Nîmes
Gal, amant de la reine, alla, tour magnanime.

Un maestru al holorimelor în limba română este poetul timişorean Şerban Foarţă. Un calambur bine cunoscut, bazat pe omonimia franceză dintre „mots" (cuvinte) şi „maux" (substantivul „rele") aparţine lui Paul Valéry: „Entre deux mots/maux il faut choisir le moindre".

Şarada, rebusul, cuvintele încrucişate intră în clasa jocurilor de substituţie. Un tip frecvent de şaradă este acela în care se operează descompunerea unui cuvânt în componentele sale (de exemplu, în silabe), dându-se apoi un echivalent analogic sau contiguu al fiecărei componente. De exemplu, „carton" se descompune în „car" şi „ton", dar cele două silabe sunt la rândul lor cuvinte şi oferă posibilitatea unei reprezentări pictografice pentru „car" şi a alteia muzicale pentru „ton".

Jocuri ale înlănţuirii

Avem în vedere jocuri care operează pe axa sintagmatică a combinării, numită de Jakobson axa contiguităţii sau metonimiei. Procedeul înlănţuirii cunoaşte în retorică diferite aspecte: acumulare („Francezi, englezi, italieni, spanioli, germani, autori de toate naţionalităţile îşi încearcă puterile, se afirmă în cultură, se întrec în creativitate, intră în competiţie pentru a câştiga anumite priorităţi"); progresie („Din cauza unui cui, s-a pierdut o potcoavă, din cauza unei potcoave a murit un cal, din cauza pierderii calului a murit călăreţul, din cauza pierderii călăreţului s-a pierdut un război, din cauza pierderii războiului s-a pierdut un regat"); enumerare („Elementele acestei mulţimi sunt 0, 1, 2, 3, 4 şi 5"); concatenare („Lumea politică este un cerc vicios, un cerc în care anarhia generează tirania; tirania dă naştere revoltei, iar revolta duce din nou la anarhie" etc.); apoi, falsa coordonare („are febră şi bani"). Un abil mânuitor al falsei coordonări este în literatura română dramaturgul şi prozatorul Teodor Mazilu.

După cum se poate vedea, există aspecte paradigmatice şi în jocuri de înlănţuire. Operează aici principiul proiectării axei paradigmatice pe axa sintagmatică, teoretizat de Roman Jakobson ca sursă de efecte stilistice. El dădea şi exemplul „I like Ike", slogan în care Ike nu este altcineva decât fostul preşedinte al Statelor Unite, Dwight Eisenhower. Recunoaştem aici procedeul aliteraţiei, constând în existenţa unor legături de similaritate între termenii legaţi prin contiguitate sintactică. Generaţia mea era fermecată de versul coşbucian „Prin vulturi vântul viu vuia," iar opera lui Eminescu abundă în situaţii de acest fel, pe care teoreticienii le includ la capitolul „înlănţuiri prin omofonie". De un deosebit efect în generarea absurdului este înlănţuirea prin automatism: „Da, într-adevăr, apa nu fierbe la 90 de grade, ci la 100 de grade; la 90 de grade fierbe unghiul drept". Să mai menţionăm înlănţuirea aleatorie, întâlnită la suprarealişti (scriitura automată) şi la partizanii literaturii potenţiale preconizate de Raymond Queneau. O prezentare mai detaliată a unor jocuri de cuvinte, acesibilă în limba română, cu accent pe aspectul lingvistic şi stilistic, se găseşte în *Dicţionar general de ştiinţe. Ştiinţe ale limbii*, de Angela Bidu-Vrănceanu, Cristina Călăraşu, Liliana Ionescu-Ruxăndoiu, Mihaela Mancaş şi Gabriela Pană-Dindelegan (Bucureşti: Editura Ştiinţifică, 1997). Este interesant faptul că unele dintre jocurile de cuvinte folosite pentru efectul lor stilistic au dat naştere şi unor jocuri de societate, a căror descriere poate fi găsită la Pierre Guiraud (op. cit., p.36-38).

Jocuri ale incluziunii

Este vorba de acele jocuri de cuvinte în care un mesaj mai mult sau mai puţin secret este înscris în interiorul unui text dat. Se disting trei grupe de jocuri de acest fel, după cum procedeul folosit este de permutare, de încorporare sau de interpolare. Permutarea este folosită în anagramare şi în logogrife, în antistrofe, metaboluri şi palindroame;

încorporarea apare în acrostihuri şi cronograme, iar interpolarea intervine în coduri argotice şi în cuvinte-valiză, inventate de Lewis Carroll (în *Alice în Ţara Minunilor*) şi care apar şi la James Joyce. Un cuvânt-valiză (varianta engleză este: „portmanteau word") este, de exemplu, la Carroll, verbul „to galumph", combinaţie între „to gallop" şi „to triumph" şi care semnifică „a galopa triumfător" Metafora valizei şi aceea a portmanteau-ului s-ar justifica deci prin faptul că două unităţi semantice diferite sunt împachetate, adăpostite într-un singur cuvânt. Cuvântul „franglais"inventat în Franţa pentru a desemna o corcitură de franceză şi engleză ar putea intra în această categorie. Nu cumva şi cuvântul „iff", inventat de matematicieni pentru a desemna pe „if an only if" ar putea intra în aceeaşi categorie? Să dăm şi un exemplu din logică. Nelson Goodman, în analiza inducţiei, a atras atenţia asupra unui paradox al culorii. Să presupunem că toate smaraldurile pe care le-am întâlnit până în momentul de faţă au fost verzi şi să definim o nouă culoare, „verdastru" (în engleză: „grue"), egală cu verde pentru smaraldurile deja întâlnite şi egală cu albastru pentru acelea pe care le voi întâlni în viitor. Ar rezulta prin inducţie că smaraldurile viitoare vor fi ... albastre. Cuvântul „verdastru" este un cuvânt-valiză în care am împachetat pe verde şi pe albastru (în engleză: grue=green + blue).

Permutarea constă în schimbarea locului unor sunete (sau litere) într-un cuvânt sau într-o frază. Încorporarea revine la înscrierea unui mesaj ludic într-un text iniţial. Interpolarea constă în introducerea în corpul unui cuvânt sau al unei fraze a unor elemente parazite convenţionale, cu efect de disimulare şi perturbare. Răufăcătorii recurg la coduri argotice bazate pe interpolare, pentru a păstra secretul mesajului lor. Pare însă curioasă includerea cuvintelor-valiză în categoria jocurilor de interpolare; nu prea se vede despre ce interpolare este vorba. Articularea primei părţi a unui cuvânt cu a doua parte a altui cuvânt este folosită de multă vreme în limbajul ştiinţific. De exemplu, cuvântul englezesc „bit" provine din „binary digit"; cuvântul „clopen", folosit în matematică pentru a desemna mulţimile care sunt în acelaşi timp închise şi deschise, provine din combinarea cuvintelor

closed (închis) şi open (deschis). La ele se adaugă şi exemplul lui „grue" discutat mai sus. Probabil că fenomenul apare şi în limbajul cotidian, după modelul lui „frangleză".

Mai sunt apoi jocurile pictografice, unde literele, silabele şi cuvintele sunt reprezentate prin imagini vizuale. Aici intră multe tipuri de rebus, caligramele devenite celebre cu G.Apollinaire şi cuvintele încrucişate pe care le-am comentat mai sus şi care, în ciuda popularităţii lor, au o istorie care nu urcă mai departe de prima treime a secolului al XX-lea, chiar dacă latinii ne-au lăsat celebrul pătrat magic în care fraza „Sator arepo tenet opera rotas" îşi poate dispune cele cinci cuvinte alcătuitoare atât pe orizontală cât şi pe verticală, într-un acelaşi pătrat de dimensiune 5. La francezi, se cunoaşte un careu de aceeaşi dimensiune, ocupat, pe orizontală şi pe verticală, de aceleaşi cuvinte: orange, ragout, agonie, nonidi, guidon, eteint, dar concatenarea lor nu generează un enunţ coerent, aşa cum se întâmplă cu careul pe care ni l-au transmis latinii.

De la aceste careuri de dimensiune 5 până la cel de dimensiune 9, posibil în limba română, fără pătrate parazite, este o cale lungă. Poate că între timp s-au putut da şi în limba franceză exemple de careuri de dimensiune superioară lui 5, fără pătrate parazite.

Ambiguitate şi lapsus

Poeticul şi ludicul interferează puternic în jocurile de cuvinte. Cum ar putea fi altfel, dacă ţinem seamă de faptul că amândouă au la bază acelaşi material, limbajul natural, şi amândouă îşi propun să se constituie într-o evadare în raport cu cotidianul, o evadare exprimată prin gratuitatea atât a ludicului cât şi a poeticului? În această ordine de idei, sunt importante „accidentele" limbajului provenite din ambiguitate, contra cărora limbajul se protejează prin diverse mijloace. Aici intră în scenă şi o altă ştiinţă, teoria informaţiei, care include şi teoria codurilor. Orice mesaj este alcătuit din două părţi: o parte propriu-zisă, de informaţie, şi o a doua parte, de control. Această a doua parte are scopul de

a face în aşa fel încât mesajul să poată fi înţeles de către destinatar, chiar dacă el a suferit, în procesul de transmitere, unele deteriorări. În limbaj ştiinţific, se spune că limbajul, deci codul folosit, trebuie să poată detecta şi corecta erorile. De exemplu, în expresia „copii cuminte" detectarea erorii este posibilă, datorită dezacordului gramatical, dar nu este posibilă şi corectarea erorii, deoarece nu putem şti dacă sintagma corectă este „copil cuminte" sau „copii cuminţi".

Un accident frecvent de limbaj este lapsus-ul (în latină, „lapsus" înseamnă „alunecare"). El este fie un accident de vorbire (lapsus linguae), fie un accident de scriere (lapsus calami) şi constă în a spune (scrie) un cuvânt pentru un altul. Lapsusul fonetic poate consta în substituirea sau intervertirea de sunete sau litere. Guiraud citează exemplul unei doamne care dorea să felicite pe autorul unui tratat de tactică militară şi s-a adresat astfel: „Felicitări pentru tic-tac-ul Dv!". Un alt exemplu de lapsus este citirea titlului piesei cunoscute a lui Eugen Ionescu „Regele moare" sub forma „Megele roare"sau sub forma „Le meurt se roi".

O sinteză a jocurilor de cuvinte

Guiraud (op. cit., p.9) propune următoarea sinteză a jocurilor de cuvinte. Aceste jocuri pot fi de trei tipuri: de substituţie, de înlănţuire şi de incluziune. Ele se pot situa la trei niveluri: fonetic, lexical şi pictografic. Jocurile de substituţie au loc pe axa paradigmatică a similarităţii şi metaforei. Jocurile de înlănţuire au loc pe axa sintagmatică a contiguităţii şi metonimiei. Jocurile de incluziune au loc pe axa sintagmatică a deplasării şi metatezei. Jocuri de substituţie la nivel fonetic: omonimia, echivocul, calamburul, holorimele; la nivel lexical: sinonimia, calamburul, şarada; la nivel pictografic: rebusul. Jocuri de înlănţuire la nivel fonetic: cancatenare; rime înlănţuite; la nivel lexical: concatenare; scriere automată; la nivel pictografic: rebusul. Jocuri de incluziune la nivel fonetic: anagrama, logogriful, palindromul; la nivel lexical: acrostihul, cronograma; la nivel pictografic: caligramele.

Multe sunt de spus pe marginea acestei sistematizări. Pentru a da numai un exemplu, nu am discutat despre palindromuri, acele expresii care se citesc la fel de la stânga la dreapta ca şi de la dreapta la stânga. Se cunoaşte exemplul enunţului „Epuraşul uşa rupe", care este palindromic. Se cunosc multe cuvinte palindromice, de lungimi până la nouă litere. Până unde merge palindromia enunţurilor coerente sintactic? Dar a celor coerente şi sintactic, şi semantic?

După cum s-a putut vedea, un acelaşi joc se poate încadra la tipuri diferite, datorită complexităţii sale şi varietăţii sale de structură.

O primă definiţie a jocului, la Huizinga

Nici o discuţie despre joc nu poate eluda cartea devenită clasică a lui Johan Huizinga *Homo Iudens*, publicată în 1938, în limba olandeză.

Urmează o ediţie în limba germană,în 1939, şi o a doua ediţie în olandeză, în 1940. Ne-am ghidat după ediţia în limba franceză, apărută la Gallimard (Paris), în 1951, la şase ani după dispariţia autorului. Anul morţii sale, 1945, ne apare acum ca o transmitere de ştafetă, deoarece în 1944 apărea la marea editură americană Princeton University Press o altă carte care avea să marcheze un punct de cotitură în evoluţia ideilor noastre despre joc, lucrarea lui John von Neumann şi Oscar Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*. Vom reveni la ea la momentul potrivit.

De formaţie istoric, Huizinga pune accentul pe evoluţia jocului, din cele mai vechi timpuri până în prima parte a secolului al XX-lea, cu referire specială la funcţia socială a jocului de-a lungul istoriei (aşa cum arată de altfel şi subtitlul cărţii sale: *Eseu despre funcţia socială a jocului*). Se dovedeşte însă a fi şi un remarcabil filozof în analiza unor aspecte teoretice.

La p. 57 – 58, Huizinga propune următoarea definiţie: Jocul este o acţiune sau o activitate voluntară, concepută ca un scop în sine, efectuată în anumite limite fixe de timp şi de loc, după o regulă liber consimţită, dar obligatorie; această activitate este însoţită de o stare de tensiune, de bucurie şi de conştiinţa de a fi altceva decât viaţa curentă.

Am fi tentaţi să reproducem şi textul francez, dar renunţăm, deoarece nici acesta nu-i aparţine lui Huizinga.

Definiţia de mai sus se află la începutul capitolului al doilea, dedicat modului în care ideea de joc este exprimată în diferite limbi. Remarcabil prin bogăţia informaţiei şi profunzimea analizelor, acest capitol pune în evidenţă faptul că în multe limbi nu există un termen generic pentru joc. Fiecare limbă segmentează în felul ei bogata semantică a jocului (pentru a da un singur exemplu, să ne gândim la distincţia dintre *game* şi *play* din limba engleză, fără corespondent în franceză sau în română). Definiţia de mai sus este pregătită cu grijă în primul capitol al cărţii *Natura şi semnificaţia jocului ca fenomen de cultură*, unde sunt enumerate vreo 25 de trăsături ale jocului, cu exemplificările de rigoare.

Un spaţiu pluridimensional al jocului

Îl vom urmări pe Huizinga în modul său de a degaja trăsăturile principale ale jocului. Pentru a permite referirea ulterioară la aceste trăsături, le vom numerota: 1) libertate; 2) situare în afara vieţii curente, a vieţii propriu-zise (deci un tip de evadare); 3) capacitate de a-l absorbi pe jucător; 4) caracter gratuit (situare în afara mecanismului de satisfacere imediată a nevoilor umane fundamentale; se poate chiar întrerupe funcţionarea acestui mecanism); 5) activitate care se constituie într-un scop în sine; 6) destindere, ca urmare a alternativei la viaţa cotidiană; 7) în manifestările sale superioare, semnifică, celebrează ceva, îşi are loc în sfera sărbătorilor şi a cultului, în aceea a sacrului; 8) dezinteres, situare dincolo de interesele materiale; 9) desfăşurare în interiorul unor frontiere temporale; 10) odată jucat, devine formă de cultură care se păstrează în amintire ca o creaţie spirituală; 11) poate fi oricând repetat; 12) limitare spaţială prestabilită, material sau imaginar (arena, tabla de joc, cercul magic, templul, scena, ecranul, tribunalul, catedra); 13) creează ordine şi este ordine; 14) aspiraţie spre frumos (factori estetici: tensiune, echilibru, balansare, contrast, variaţie, înlănţuire, deznodământ, ritm, armonie, farmec); angajează, captivează;

15) tensiune determinată de incertitudine, şansă; 16) reguli imperioase şi indiscutabile; violarea lor înseamnă distrugerea jocului; 17) tendinţa de constituire în grupuri (asociaţii, cluburi, societăţi, federaţii, uniuni etc. ale celor ce practică un anumit joc sau sunt implicaţi indirect în el); 18) facultatea de a fi un altul, ca tendinţă spre mister, mascaradă, prin deghizare, travesti, mască etc.; 19) caracter de luptă pentru ceva sau reprezentare a ceva; 20) sacralitate; 21) capacitate de reprezentare, figurare, acompaniere a unor evenimente cosmice; 22) include destinul de a fi o jucărie a Divinităţii; 23) acces la zonele supreme ale spiritului; 24) implicare în acţiunile sacre ale popoarelor primitive; 25) numitor comun al lumii copilăriei şi al lumii popoarelor primitive; 26) coexistenţă a caracterului hieratic şi a caracterului ludic în domeniul sacrului.

Consecinţă a trăsăturilor puse în evidenţă mai sus, Huizinga propune o nouă definiţie a jocului (p.35): acţiune liberă, simţită ca fictivă, situată în afara vieţii curente, capabilă nu mai puţin să-l absoarbă total pe jucător, lipsită de orice interes material şi de orice utilitate; limitată în mod expres, temporal şi spaţial; desfăşurându-se ordonat, după reguli prestabilite şi dând naştere, în viaţa propriu-zisă, unor relaţii de grup înconjurate de mister sau accentuând, prin deghizare, o anumită bizarerie în raport cu lumea obişnuită.

Această nouă definiţie accentuează aspectul de competiţie şi de alternativă la viaţa curentă, deosebindu-se, mai cu seamă în partea finală, de definiţia anterioară. Dar nici una dintre definiţii nu poate înlocui bogăţia semantică reprezentată de cele 26 de trăsături.

Lumea jocului, între sinergie şi conflict

Sunt toate aceste aspecte ale jocului în relaţii armonioase, de potenţare reciprocă, de concordanţă şi colaborare, sau capătă ele uneori aspecte conflictuale? Nu este greu de văzut că are loc cea de a doua variantă a alternativei. Mai întâi, să observăm că unele trăsături sunt înrudite, aproape că decurg unele din altele sau le repetă sinonimic pe acestea; 5 pare să decurgă din 2 şi 4, 8 aproape că repetă pe 4; capacitatea

de a captiva, inclusă în 14, repetă pe 3; 18 interferează cu 2 și 6, 13 seamănă cu 16 etc. Mai interesantă pare a fi reliefarea aspectelor conflictuale.

Huizinga opune ludicului seriosul, gravitatea, dar în același timp accentuează faptul că în cele mai multe cazuri jucătorul își ia jocul foarte în serios, practicându-l cu întreaga gravitate. Practicile de cult au cea mai înaltă gravitate, fără a-și pierde în acest fel dimensiunea ludică. Libertatea (1) este considerabil restrânsă de limitarea temporală (9) și de limitarea spațială (12), de ordine (13) și mai cu seamă de atotputernicia unor reguli (16). Huizinga are în vedere prin această trăsătură în primul rând faptul că orice persoană este liberă să decidă dacă să intre sau nu într-un anumit joc, cu alte cuvinte el consimte liber să se supună restricțiilor de ordine pe care jocul le instaurează. Vom vedea că nu se întâmplă totdeauna așa. În cele mai multe cazuri, chiar cu restricțiile impuse, necesare pentru a nu permite libertății să alunece în arbitrar, îi rămâne jucătorului loc destul pentru a-și manifesta propria sa pricepere. Destinderea (6) se ciocnește cu tensiunea (15). Trăsătura (4), care situează jocul dincolo de satisfacerea nevoilor umane fundamentale, ignoră faptul că aceste nevoi nu includ numai nevoi materiale, ci și nevoi spirituale, cum ar fi nevoia de apartenență la anumite grupuri sociale, de la familie la prieteni, popor, colectiv profesional, de muncă etc., și nevoia de identitate, care include nevoia de afirmare a personalității, între altele tocmai prin valorificarea potențialului ludic generator de creații artistice sau științifice. Îl lăsăm pe cititor să completeze aceste exemple cu altele (vezi și cap. XI).

În ceea ce privește cele două definiții ale jocului, este cazul să ne întrebăm dacă ne putem aștepta să se poată cuprinde într-o singură frază, fie ea și una foarte amplă, marea varietate de aspecte ludice. Avem dreptul să fim sceptici în această privință. Pe de o parte, nu orice joc are toate trăsăturile enumerate, pe de altă parte, nu toate aspectele ludicului sunt cuprinse în lunga listă de mai sus. Vom da numai câteva exemple. Datul în scrânciob al copilului are el caracter de luptă (19), comportă el o schimbare de identitate de tipul măștii (18) sau o limitare

temporală prestabilită? Nici măcar jocurile sportive de competiţie nu au totdeauna o atare limitare, ci numai una relativă (tenisul, şahul). Din momentul în care cele mai multe jocuri de competiţie au intrat în sfera afacerilor financiare, mai putem vorbi de caracterul lor gratuit (4), de constituirea lor într-un scop de sine (5), de situarea dincolo de interese materiale (8) şi de caracterul lor de destindere (6), întrecut deseori de o adevărată stare de enervare a jucătorilor? În spaţiul pluridimensional al celor 26 de coordonate pe care Huizinga le-a degajat îşi fac într-adevăr loc multe feluri de jocuri, cu rezerva că în unele cazuri anumite coordonate rămân practic nefolosite sau folosite foarte puţin. Ne putem chiar întreba dacă proprietatea unei activităţi de a fi joc este de natură binară sau mai degrabă o chestiune de grad sau/şi de tipologie.

Jocuri în care nu intrăm de bunăvoie

Da, astfel de jocuri există. Intrăm în viaţă găsindu-ne gata implicaţi în anumite jocuri care ne sunt impuse. Când ajungem să conştientizăm acest fapt, este prea târziu pentru a mai putea schimba ceva. Huizinga a ignorat aceste jocuri în care intrăm nu pe baza liberului nostru consimţământ, în conformitate cu condiţia (1) de libertate, ci împinşi nu se ştie de cine şi fără a fi întrebaţi. Intră aici atât unele jocuri ale naturii, cum ar fi ereditatea, cât şi unele jocuri ale istoriei. Jocurile limbajului, la care se referă Wittgenstein în ale sale *Investigaţii filozofice*, ne sunt impuse pe cale ereditară şi pe cale socială. Limbajul comportă diferite utilizări, fiecare utilizare fiind caracterizată prin regulile sale specifice de joc.

Aceste reguli ne sunt transmise prin sistemul de educaţie şi nu prea avem posibilitatea de a le modifica în mod semnificativ. Nu ne rămâne decât să învăţăm jocurile respective, pentru a putea beneficia de ele. Jocurile logice ale societăţii în care trăim variază şi ele în funcţie de domeniul în care urmează să le folosim. Logica vieţii de fiecare zi nu e totdeauna aplicabilă în ştiinţă, după cum nici logica juridică nu e aceeaşi

cu logica simţului comun. În secolul care tocmai s-a consumat am mai aflat că nici logica lumii cuantice nu e aceeaşi cu logica macroscopică. Fiecare dintre aceste domenii are propriile sale jocuri logice, caracterizate prin reguli specifice care cel puţin în parte trebuie să fie descoperite de jucător.

Dar poate că domeniul cel mai spectaculos al acestor jocuri care dau peste noi fără să ne întrebe este cel al jocurilor globalizării. Internetul este un joc de acest fel, sistemul mondial al economiei este şi el un joc al globalizării, care face corp comun cu jocul ecologic mondial. Într-o altă parte a acestei cărţi prezentăm şi alte jocuri globale. Astfel, Organizaţia Naţiunilor Unite impune ţărilor globului o serie de jocuri ale comunicării internaţionale şi ale deciziilor cu valabilitate internaţională. Tribunalul Internaţional de la Haga procedează în mod similar, Uniunea Europeană face acelaşi lucru la nivelul statelor Europei. Poate că unii îşi închipuie că folosim aici cuvântul *joc* în mod abuziv sau că este vorba de o utilizare metaforică a acestuia. Un exerciţiu simplu arată că în toate exemplele menţionate avem a face cu jocuri propriu-zise, chiar dacă unele depăşesc cadrul considerat de Huizinga, pentru a se înscrie în zona jocurilor de strategie introduse de John von Neumann. Dar şi în cazul jocurilor de strategie se poate întâmpla ca un jucător să nu fie conştient de toate jocurile în care este implicat. Domnul Jourdain al lui Molière este aici omniprezent. Huizinga se referă la faptul că oamenii sunt jucării ale Divinităţii (22), reluându-l astfel pe Platon, care considera pe om o jucărie a zeilor, dar noi avem în vedere jocurile pământeşti ale istoriei şi ale proceselor actuale de globalizare.

Putem învăţa un joc fără a-i cunoaşte regulile? Wittgenstein (în *Gramatica filozofică*) compară jocul cu gramatica. Învăţăm o limbă înainte de a-i învăţa gramatica sub formă de reguli explicite. La fel şi cu jocul. Până la un punct, îl putem învăţa practicându-l. Aşa se întâmplă şi cu jocurile în care suntem implicaţi înainte de a ne da seama de acest lucru. Învăţarea regulilor vine mai târziu sau niciodată.

Jocul, ca punere în scenă

Jocul înţeles ca spectacol, ca rezultat al unei regii, al unei puneri în scenă nu este numai cel explicit de acest fel, ci include o mare varietate de forme de existenţă implicită, care abundă în lumea actuală. Într-un articol celebru: *A învăţa, a preda, a învăţa să predai* (publicat în 1963, în American Mathematical Monthly 70, p. 605-619), George Polya observă că profesorul trebuie să fie un actor. Chiar dacă predă pentru a suta oară teorema lui Pitagora, el nu are voie să se arate plictisit, ci e obligat să se comporte în faţa elevilor ca şi cum atunci descoperă şi el această teoremă şi este emoţionat în faţa frumuseţii ei, întocmai ca actorul de teatru care interpretează pentru a suta oară un personaj al *Scrisorii pierdute*, dar o face ca pentru prima oară. Ca actorul care trebuie mereu să se asigure că ţine legătura cu spectatorii, că replicile sale trec rampa, profesorul are şi el obligaţia să se asigure că nu pierde legătura cu clasa de elevi. Lecţia trebuie pregătită după un scenariu care acordă atenţie metodei socratice, de dialog cu elevii; profesorul se expune clasei nu numai ca profesionist al unei anumite materii de învăţământ, ci şi ca o personalitate umană care se manifestă şi prin dicţiunea rostirii sale, prin modul în care este îmbrăcat, prin mimica şi gesturile sale. Din acest punct de vedere, predarea are ceva comun şi cu muzica, observă Polya. Modul în care repetăm anumite lucruri fără a-i plictisi pe elevi poate prelua câte ceva din acea formă a artei muzicale care se numeşte „temă cu variaţiuni“ (Beethoven), care reia modificând şi nuanţând, ca şi din forma numită „rondo“ (Mozart), care inserează între două repetări un anumit pasaj ilustrativ adecvat. De regie şi punere în scenă este nevoie şi în pledoaria unui avocat, şi în predica unui preot, şi într-un discurs parlamentar, şi în prezentarea unei comunicări ştiinţifice, şi în întâlnirea unui poet cu cititorii săi, şi în întâlnirile dintre diplomaţi. Putem merge mai departe şi susţine că întregul nostru comportament public prezintă o dimensiune ludică, de strategie şi spectacol, pe care nu e bine să o lăsăm totdeauna pe seama improvizaţiilor sau, recurgând la o bine cunoscută glumă, aceste impro-

vizaţii trebuie pregătite cu grijă. Ce este comportamentul public? El începe din momentul în care se mai află în preajma noastră cel puţin o persoană. Comportamentul în familie este deci şi el public. Este interesant în această privinţă modul în care decurge o discuţie între două persoane şi schimbarea care se produce din momentul în care apare şi o a treia persoană, fapt care poate declanşa orgolii nemanifestate anterior. Cărţile sociologului american Erving Goffman despre comportamentul public (a se vedea, de exemplu, *Relations in Public* (Basic Books, New York, 1970) sunt o referinţă fundamentală pentru întreaga problemă pe care o avem în vedere aici.

Metaforele jocului sunt la rândul lor jocuri

Modul în care Huizinga explorează prezenţa ludicului în domeniile competiţiei, ale justiţiei, ale războiului, ale înţelepciunii tradiţionale, ale poeziei, ale tuturor formelor de viaţă colectivă ne pune în gardă asupra faptului că autorul are în vedere, de fiecare dată, prezenţa anumitor factori ludici, nu a totalităţii ludicului, aşa cum a fost el prezentat prin cele 26 de trăsături. De exemplu, prezenţa ludicului în artă şi în filozofie se sustrage, în general, restricţiilor temporale (9) şi spaţiale (12), nu e repetabilă (11), dar dezvoltă din plin trăsături ca (14) atracţia spre frumos, (10) formă de cultură, (20) sacralitate, (21) semnificaţie cosmică, (23) acces la zonele supreme ale spiritului. În acelaşi timp, formele metaforice ale jocului constituie o problemă importantă, pe care nu o mai putem aborda aici; problema este şi delicată, deoarece procesele metaforice au, la rândul lor, o componentă ludică, deci, într-o largă măsură, metaforele jocului aparţin ele însele jocului. Trebuie însă să fim pregătiţi pentru a face faţă unei dificultăţi majore: în situaţia în care, aşa cum am văzut, reuşim cu greu să stabilim sensul literal al jocului, nu ne putem aştepta la un statut suficient de clar al metaforelor jocului. Să luăm, de exemplu, cartea lui Jaqueline Feldman *La sexualité du Petit Larousse ou le jeu du dictionnaire* (Éditions Tierce, Paris, 1980). Despre ce joc este vorba aici? Autoarea are în vedere modul în

care, într-un dicţionar, fiecare cuvânt generează un graf G, după regula următoare: Cuvântul x de la care pornim este un vârf în G. Toate cuvintele folosite în definirea d(x) al lui x sunt şi ele vârfuri ale lui G. Toate săgeţile orientate dinspre x spre unul sau altul dintre cuvintele din d(x) sunt arce în G. Cuvintele folosite în definirea d(d(x) a cuvintelor din d(x) sunt vârfuri în G. Săgeţile dinspre fiecare cuvânt u din d(x) spre fiecare cuvânt din definirea d(u) a lui u sunt arce în G. Continuând în acest fel, suntem siguri că procesul se încheie după un număr finit de paşi, deoarece numărul cuvintelor din dicţionar este finit. Desigur, întregul proces este circular, deci tautologic, şi multe dintre consecinţele sale sunt amuzante, situaţie care o îndreptăţeşte pe autoare în a aşeza întreaga întreprindere sub semnul jocului, dar de fapt numai câteva dintre atributele jocului sunt prezente, cum ar fi atotputernicia unei reguli, repetabilitatea acţiunii, caracterul ei amuzant, agreabil, limitarea spaţială şi poate încă vreo două. Este destul atât pentru a ne prevala de eticheta ludică? Acum, cu proliferarea proceselor algoritmice, care nu fac decât să instituie reguli imperioase, situaţii de felul de mai sus ni se oferă la tot pasul; unde ne oprim? Vorbim despre jocuri politice, jocuri bancare, jocuri mafiotice şi câte altele. Dar, pe de altă parte, aşa cum am văzut, nici la cealaltă extremă nu ne putem plasa, pretinzând, pentru atribuirea statutului de joc, îndeplinirea tuturor celor 26 de condiţii, deoarece în acest caz, aşa cum am sugerat prin exemple, aproape că nu ar mai exista jocuri.

S-ar putea reproşa că în exemplul dicţionarului am omis criteriul gratuităţii, pentru unii autori cel mai important atribut al jocului. L-am omis deoarece grafurilor de tipul celor descrise li s-ar putea atribui, pe lângă aspectul lor ludic, unele virtuţi ca instrument de explorare. Pentru Jacqueline Feldman, chiar aşa se şi întâmplă, dar rezultatul ştiinţific este atât de derizoriu în raport cu speranţele puse în grafurile respective, încât autoarea a conchis în cele din urmă că prevalează registrul ludic. Acest exemplu arată totodată cât de fragilă este uneori graniţa dintre utilitate şi gratuitate, fragilitate pentru care pledează şi alte situaţii prezentate în cartea de faţă. Ne aflăm aici în consonanţă cu Huizinga,

care la p. 330 a cărţii sale scrie: „Între timp, distincţia dintre joc şi non-joc în fenomenele de civilizaţie devine totdeauna mai dificilă, pe măsură ce ne apropiem de epoca contemporană". Însă raţiunile care l-au condus pe Huizinga la această concluzie, raţiuni ilustrate mai cu seamă cu exemple din viaţa parlamentară britanică, par să fie cu totul altele decât cele pe care le-am dezvoltat mai sus.

Joc şi cultură, la Huizinga

De altfel, Huizinga mai face o afirmaţie, care, în perspectiva anilor scurşi de atunci, apare foarte discutabilă: „Se impune din ce în ce mai mult concluzia că elementul ludic al culturii, începând cu secolul al XVIII-lea, în care încă îl vedem în plină dezvoltare, şi-a pierdut semnificaţia în aproape toate domeniile care-i erau familiare. Cultura modernă nu mai este «jucată», iar acolo unde totuşi dă această impresie, se trişează" (p. 330). Afirmaţia este de o deosebită gravitate, dacă ţinem seamă de faptul că pentru Huizinga adevărata cultură nu poate exista fără o anumită ţinută ludică, deoarece cultura presupune o anumită moderaţie şi o anumită stăpânire de sine [...]. Într-un anume sens, cultura va fi întotdeauna jucată, pe baza unui acord mutual, pe bază de reguli date. Adevărata civilizaţie pretinde totdeauna fair play-ul, care nu-i altceva decât echivalentul, în termeni ludici, al bunei-credinţe. Cel care strică jocul, strică însăşi cultura" (p. 337).

Splendide idei, care ne pot ghida şi azi. Putem să-l înţelegem pe Huizinga, dacă luăm în considerare atmosfera sumbră a anilor '30 târzii, în care a scris *Homo ludens*, dar în acelaşi timp trebuie să constatăm că în cea de-a doua jumătate a secolului al XX-lea jocul a cunoscut o ascensiune impresionantă, care i-a conferit rolul de paradigmă universală; puterea sa explicativă se exercită în cvasi-totalitatea domeniilor. Dar această situaţie a devenit posibilă datorită îmbogăţirii substanţiale pe care ideea de joc a primit-o prin dezvoltarea unei viziuni strategice şi prin asocierea sa cu studiul proceselor de comunicare. Esenţiale, în această privinţă, au fost şi studiile lui Anatol Rapoport,

care a contribuit la succesul viziunii de joc strategic în domeniul socio-uman. Vom menţiona în această ordine de idei, cartea sa *Fights, Games and Debates* (University of Michigan Press. Ann Arbor, 1960), unde se propune o tipologie a conflictelor sociale în care jocurile de strategie ocupă o poziţie intermediară, preferabilă războiului, dar inferioară dezbaterii şi tratativelor. Între timp, a devenit însă clar că în spatele oricăror dezbateri şi al oricărui război se află un joc strategic. Afirmaţia lui Huizinga, după care războiul modern pare să fi pierdut orice contact cu jocul (p. 335), a putut să fie făcută într-un moment în care încă nu se maturizase teoria jocurilor de strategie.

Dar legătura strânsă pe care Huizinga o preconizează între joc şi cultură ne stimulează să explorăm zona absentă din cartea sa; la atenţia pe care el o acordă formelor ludice ale poeziei, artei şi filozofiei, vom adăuga, cu toată modestia, încercarea de a identifica componenta ludică a ştiinţei. Nu ne aflăm în faţa unui teren viran; iluştri predecesori, la care ne referim în mai multe locuri în această carte, au trasat primele jaloane.

Componenta ludică a ştiinţei

Pe coperta din spate a ediţiei franceze publicate la Gallimard, se pretinde că Huizinga analizează şi prezenţa jocului în ştiinţă, dar afirmaţia nu are acoperire. Huizinga se ocupă de funcţia socială a jocului, nu şi de posibila componentă ludică a sociologiei. În ceea ce priveşte ştiinţele naturii, logica şi matematica, ele sunt complet ignorate de Huizinga şi de altfel nici nu intrau în proiectul său aceste teorii. Pe de altă parte, preocupat de problema generală a semnificaţiei culturale a jocului, Huizinga ar fi trebuit măcar să semnaleze problema formelor ludice în ştiinţă, chiar dacă nu avea de gând s-o abordeze. Este greu de crezut că nu avea cunoştinţă de faptul că o ştiinţă venerabilă, teoria probabilităţilor, se sprijină esenţial pe probleme ridicate de jocurile hazardului, jocuri care i-au preocupat pe pionierii acestei ştiinţe, G. Cardano (în secolul al XVI-lea), Blaise Pascal, Pierre de Fermat,

Jacques Bernoulli şi Christian Huyghens (în secolul al XVII-lea). Mari matematicieni au continuat să se ocupe de jocuri până în zilele noastre. La începutul secolului al XX-lea, Émile Borel a publicat o carte în care propune o teorie matematică a jocului de bridge. S-a desprins clar ideea că jocurile hazardului oferă situaţii tipice pentru înţelegerea generală a modului în care hazardul intervine în ştiinţele naturii şi în cele sociale.

Nu este însă vorba numai de atât. Ştiinţa a avut întotdeauna, în ţesătura ei intimă, o componentă ludică la fel de importantă ca aceea a artei. De ce a fost ea recunoscută mai greu şi chiar azi i se recunoaşte cu timiditate prezenţa? Explicaţia este de ordin istoric. Din cele mai vechi timpuri, artei i s-a recunoscut gratuitatea, caracterul de podoabă şi de noblețe.

Nimeni nu a pretins pictorilor şi poeţilor ca operele lor să sporească avuţia materială a societăţii, ei au fost admişi exclusiv pentru raţiuni de ordin estetic. Altfel stau lucrurile cu oamenii de ştiinţă, deşi aceştia ar fi putut şi ei să fie admiraţi exclusiv sau măcar în primul rând pentru raţiuni de ordin estetic.

Teorema lui Pitagora şi Elementele lui Euclid nu sunt cu nimic mai prejos decât sculpturile lui Phidias şi tragediile lui Eschil. Newton stă foarte bine alături de Shakespeare, ca şi Darwin alături de Beethoven. Savanţii merită să fie admiraţi ca şi poeţii, pentru talentul cu care răspund la nevoia omenească de înţelegere a lumii şi a oamenilor. Atât şi nimic mai mult. Dacă totuşi nu s-a întâmplat aşa, dacă savanţii sunt apreciaţi de societate după alte criterii, dacă ştiinţa este judecată după alte norme decât arta, aceasta se explică prin faptul că ştiinţa a dezvoltat, în acelaşi timp cu funcţia ei cognitivă, şi o funcţie utilitară, de satisfacere a unor nevoi materiale. Cum era şi de aşteptat, această a doua funcţie a contat, pentru diriguitorii societăţii, mai mult decât prima funcţie. Dar nu s-a înţeles lecţia istoriei: cele mai profunde aplicaţii ale ştiinţei au fost exact acelea care nu au fost planificate, acelea care au căzut din pomul cunoaşterii atunci când ele s-au copt. Din punctul de vedere care ne preocupă aici, trebuie să reţinem faptul că

știința progresează în mare măsură pe baza unor criterii de ordin estetic. Vin în sprijinul acestei afirmații numeroase mărturii ale unor matematicieni, fizicieni, chimiști, biologi și filozofi dintre cei mai apreciați. M-am referit la acestea în alte lucrări pe care le-am publicat de-a lungul anilor și nu le mai reiau aici. Atunci când căutăm relațiile științei cu arta, nu trebuie să uităm cât de multă artă se află ascunsă în viața internă a matematicii, fizicii, chimiei, biologiei și informaticii.

Dacă aceasta este realitatea, morala devine clară. Componenta artistică a științei ascunde, la rândul ei, o componentă ludică pe măsură. Savantul este ghidat de aceeași curiozitate gratuită care-l hrănește pe poet, chiar dacă birocrația socială îl rânduiește altfel.

De la descoperire la invenție și de la invenție la joc

Tradiția a asociat știința cu procesul de descoperire, lăsând artei privilegiul de a fi ghidată de invenție. S-a acceptat relativ ușor ideea că invenția are o componentă ludică mai puternică decât descoperirea (idee care merită să fie testată în continuare), de unde concluzia grăbită că jocul este mai important în artă decât în știință. Însă între timp lucrurile s-au schimbat. Itinerarul instituit de știința galileo-newtoniană: observare – ipoteză – experiment – inducție – generalizare – teorie – testare a intrat din ce în ce mai mult în criză, de îndată ce raza de acțiune a științei s-a extins dincolo de universul macroscopic, spre infinitul mare (teoria relativității, cosmologia) și spre infinitul mic (mecanica cuantică, fizica particulelor elementare, biologia moleculară). Observația și experimentul, inducția și teoria au devenit tot mai neputincioase, știința a putut face față tot mai puțin sloganului lui Auguste Comte și Pasteur „savoir c'est prévoir", funcția predictivă a devenit, din centrală, marginală, determinismul clasic a fost pus sub semnul întrebării, logica științei nu s-a mai mulțumit cu logica aristotelică, forțându-i granițele spre diferite logici neclasice; paradoxul, altă dată marginalizat, s-a deplasat spre centrul științei; limbajul uman nu a mai putut face față unei științe preocupate tot mai mult de ceea ce se întâmplă

dincolo de universul macroscopic (univers care a constituit, de-a lungul mileniilor, cadrul în care s-au născut şi au evoluat limbile naturale şi, în general, limbajul uman) şi, în aceste condiţii, ştiinţa a recurs la tot felul de compromisuri, metafora cognitivă fiind probabil cel mai important dintre ele.

Toate aceste împrejurări au condus la situaţia actuală: itinerarul galileo-newtonian a cedat parţial locul modelelor cognitive şi metaforelor cognitive, de natură ipotetic-explicativă. Funcţia principală a ştiinţei a devenit în mare măsură aceea de a explica. Cu aceasta, rolul invenţiei a crescut foarte mult. Modelele cognitive sunt inventate, ele sunt ipoteze menţinute atât timp cât capacitatea lor explicativă este mulţumitoare.

În condiţiile în care experimentul nu mai este posibil, testarea unui model revine la testarea gradului său de coerenţă. Dar ce sunt de fapt aceste modele şi metafore cognitive altceva decât scenarii cu nimic diferite de cele care stau la baza unor filme? Ele creează lumi alternative faţă de lumea autentică. Regăsim astfel trăsăturile de bază ale jocului.

Structura conflictuală a modelului cognitiv

Dar lucrurile nu se opresc aici. Modelul cognitiv se apropie şi în acelaşi timp se distanţează de fenomenul studiat f. Se apropie, deoarece numai pe baza analogiei sale cu f rezultatele obţinute în studiul modelului au o anumită relevanţă în raport cu f. Se distanţează, deoarece numai diferenţa de natură şi/sau de complexitate între model şi f face posibilă existenţa unei metode aplicabile modelului, dar neaplicabile lui f. În acest fel, procesul de modelare cognitivă are o structură inevitabil conflictuală; mereu ameliorăm un aspect deteriorând un altul. De aceea, nici un model nu este ultimul, orice model prezintă o relativă inadecvare şi unica lui şansă este aceea de a ceda locul altuia mai bun. Procesul de modelare este infinit, imaginaţia noastră are aici un câmp nelimitat de desfăşurare. Istoria modelării

sistemului solar şi a celui atomic ilustrează această situaţie. Desigur, infinitatea la care ne-am referit este numai potenţială, ceea ce avem în mod efectiv este numai o parte finită iniţială a acestui proces. Metafora urmează şi ea o strategie similară, aşa cum am arătat în altă parte. Putem deci spune că între cele două tendinţe opuse ale modelului sau ale metaforei cognitive are loc un joc strategic etern, din care parcurgem, la orice moment, numai o parte finită.

Dubla faţă a unor jocuri: cunoaştere şi gratuitate

Jocurile au intrat în strategia ştiinţei moderne, realizând astfel performanţa de a putea fi apreciate atât sub aspectul gratuităţii şi amuzamentului cât şi sub acela al funcţiei lor de cunoaştere, deci ca model cognitiv. Vom trece în revistă câteva exemple majore de acest tip.

Un exemplu pe care l-am prezentat în *Invenţie şi descoperire* este cel bazat pe metafora muzicală a supercorzilor pentru ipotetica mare explozie prin care s-a născut Universul şi pentru evoluţia sa ulterioară. Un alt exemplu celebru este cel al automatelor celulare imaginate de John von Neumann (*The general and logical theory of automata*, Cambridge, M.I.T. Press, 1948) ca model al apariţiei şi evoluţiei vieţii. Un exemplu simplu de automat celular a fost propus de John Conway şi se numeşte „jocul vieţii", deoarece exprimă, sub forma unui joc, o ipoteză asupra modului de funcţionare a autoreproducerii, deci a perpetuării vieţii. Jocul se desfăşoară într-un spaţiu planar (deci cu două dimensiuni) împărţit prin paralele echidistante, orizontale şi verticale, în pătrate în care se află, în fiecare în parte, câte o celulă care poate avea două stări: 0 (moarte) sau 1 (viaţă). Automatul funcţionează pe baza a două reguli: (a) o celulă moartă este readusă la viaţă (deci 0 se înlocuieşte cu 1) atunci şi numai atunci când în vecinătatea ei (deci în cele opt pătrate care o înconjoară) se află exact trei celule vii; (b) o celulă vie supravieţuieşte dacă şi numai dacă există în vecinătatea ei două sau trei celule vii. Ideea care stă la baza acestui automat se poate exprima simplu: atât suprapopularea cât şi izolarea provoacă moartea.

În acest joc al lui Conway, există trei posibilităţi pentru o populaţie (adică pentru o mulţime de celule): dispariţie, comportament ciclic şi expansiune.

Aşa cum am mai arătat, cartea lui Huizinga apare în ajunul unor evoluţii fundamentale în studiul jocurilor, de care Huizinga nu mai avea cum să se prevaleze în scurtul răgaz care-i mai rămăsese; avem în vedere teoria jocurilor de strategie, care se asociază momentului de trecere a culturii de la primatul paradigmei energiei la primatul paradigmei informaţiei. În partea a doua a anilor '40 ai secolului al XX-lea iau naştere concomitent informatica (construirea primului calculator electronic programabil, de echipa lui John von Neumann), teoria informaţiei (Claude Shannon), cibernetica (Norbert Wiener). Tot atunci şi la începutul anilor '50 se naşte teoria codurilor (R.W. Hamming) şi au loc marile descoperiri din domeniul geneticii moleculare, culminând cu descifrarea codului genetic şi cu descoperirea structurii de dublă elicea acizilor dezoxiribonucleici, în 1953 (J.D. Watson – F.H.C. Crick). Acesta este contextul informaţional-computaţional în care se plasează studiul jocurilor de strategie, studiu în care ideea de informaţie intervine în mod decisiv. De la jocurile cu două persoane (cele mai simple fiind cele de sumă nulă, deci în care unul dintre parteneri câştigă exact cât pierde celălalt), se trece la studiul jocurilor cu mai multe persoane, în care devin posibile coaliţiile.

Conway şi von Neumann în perspectivă culturală

Jocul vieţii al lui Conway a fost publicat într-o carte cu trei autori, nu mai puţin importantă decât aceea a lui Huizinga: Elwyn R.Berlekamp, John Horton Conway, Richard K.Guy: *Winning ways, for your mathematical plays*. Academic Press, London, 1982. Deoarece jocul lui Conway se află în descendenţa automatelor celulare ale lui von Neumann, este poate relevant să semnalăm faptul că Erwin Schrödinger (*What is life?*, Cambridge University Press, 1944; versiune românească la Editura Politică) şi von Neumann (lucrarea deja

citată din 1948) au putut avea o anumită influenţă asupra lui Watson şi Crick, a căror dublă elice a inspirat recent pe câţiva matematicieni şi informaticieni în a propune un nou tip de automat, care poartă chiar numele celor doi biologi: Watson-Crick. A se vedea în acest sens cartea lui Gheorghe Păun, G. Rozenberg şi Arto Salomaa, *DNA Computing; New Computing Paradigms*, Springer, Berlin et al, 1998. Într-un articol recent (*Conway's game of life and the ecosystem represented by Uexküll's concept of Umwelt*). Sign Systems Studies, 29, 1 (2001), 63-69) am încercat să arătăm că jocul vieţii al lui Conway îndeplineşte toate condiţiile pentru a putea fi considerat un model al tipului de sistem ecologic reprezentat de ideea de Umwelt dezvoltată de Jakob von Uexküll în explorările sale de pionierat din prima jumătate a secolului al XX-lea. Un articol fundamental al acestui autor a fost republicat, în engleză: *The theory of meaning*. Semiotica 42, 1 (1982), 25-82. Prezentăm toată această „polifonie" (termenul este al lui M.Bakhtin), acest dialog între discipline, pentru a vedea migraţia posibilă a unui aparent joc nevinovat, fără pretenţii cognitive, cum ar putea să pară jocul lui Conway unor neiniţiaţi (jocul se pretează, într-adevăr, unui divertisment foarte amuzant), pentru a pune în evidenţă dubla faţă a unor jocuri, gratuită şi cognitivă în acelaşi timp, şi faptul că un joc introdus în legătură cu o anumită problemă se poate dovedi semnificativ într-o altă problemă, fără nici o legătură aparentă cu problema care l-a generat.

Ne putem deci oricând aştepta la o viziune ludică asupra unei probleme ştiinţifice şi la o consecinţă cognitivă a unui joc de amuzament. De exemplu, ecologia a fost privită ca spectacol teatral de G.Evelyn Hutchinson, *The Ecological Theater and the Evolutionary Play*, Yale University Press, New Haven, 1965) şi Mihai Dinu (*Éléments pour une écologie mathématique*, Informatică şi Modele Matematice în Ştiinţele Sociale. 3, 1/2, 1974, 43-53). Jocul de şah a fost practicat vreme îndelungată ca simplă destindere, dar de mai multe decenii i s-au descoperit virtuţi modelatoare, în domeniul economic. Există o întreagă literatură în această privinţă iar în România este cunoscută activitatea de

acest tip a chimistului Paul Voiculescu, fost şahist de performanţă. Mai mult decât atât, şahul a devenit de multă vreme o problemă de interes în domeniul Inteligenţei Artificiale (a se vedea şi capitolul dedicat şahului în cartea de faţă).

În ceea ce priveşte jocurile de strategie, ele s-au impus în cvasi-totalitatea domeniilor de cercetare prin capacitatea explicativă remarcabilă pe care au demonstrat-o. Steven J.Brams a dedicat o sinteză jocurilor de strategie în literatură şi altele două jocurilor de strategie în viaţa politică (*Game Theory and Politics*, Free Press, New York, 1976). Acelaşi autor a propus o grilă de lectură a Bibliei în perspectiva jocurilor de strategie (S.J. Brams. *Biblical Games: A strategic Analysis of Stories in the Old Testament*. MIT Press, Cambridge, Mass, 1980). Acest din urmă fapt merită a fi asociat cu ideea, insistentă la Huizinga, a prezenţei unei componente ludice în textele religioase. Dintre autorii români care s-au remarcat prin adoptarea unei perspective strategice în studiul teatrului, vom remarca pe Pia Brânzeu (*A systemic approach to theatre*, Poetics 6, 3/4 (1977), 351-374), care a studiat piesa *Othello*, de Shakespeare şi pe Iolanda Lalu (*Balance and game in the study of theatre*, Poetics 6, 3/4 (1977), 339-350), care a studiat echilibrul şi strategia personajelor în *Richard al III-lea*, de Shakespeare. După cum se vede, am dat cu precădere exemple din domeniul literar-artistic şi religios. În ceea ce priveşte aplicarea teoriei jocurilor în ştiinţele sociale şi în cele ale naturii, exemplele sunt mult mai numeroase, ele pot fi urmărite în secţiunile de specialitate ale revistelor internaţionale de recenzii.

Esenţa jocului este libertatea

Titlul cărţii de faţă urmăreşte să sublinieze un aspect al jocului care, deşi semnalat de diverşi autori, nu a căpătat atenţia cuvenită, nu a fost urmărit în consecinţele sale şi în varietatea formelor sale de manifestare. Este adevărat că Huizinga începe chiar cu această trăsătură (p.26), dar numai pentru că el raportează libertatea la actul preliminar

de intrare în joc. Sunt liber să decid dacă mă angajez sau nu într-un anumit joc (am văzut însă că nu totdeauna este posibil acest lucru). Huizinga îl citează pe Platon cu următoarea definiţie a jocului (p.259): „Un lucru care nu implică nici utilitate, nici adevăr, nici valoare de comparaţie şi nu e cu nimic dăunător; poate fi judecat cel mai bine după graţia (chari) pe care o are şi după plăcerea pe care o procură. O atare satisfacţie, care nu implică nici foloase materiale, nici daune, este un joc: paidia". Huizinga observă că limba greacă dispune de cel puţin patru cuvinte pentru „joc" şi nici unul dintre ele nu acoperă întregul spectru semantic pe care-l are acest cuvânt în limbile romanice, de exemplu. Aceste patru cuvinte sunt: paidia (asociat cu lumea copilăriei), agon (competiţie), scholazein (vacanţă), diagoge (disipare). Nici unul dintre ele nu are caracterul generic al jocului, aşa cum îl are, de exemplu, ludus în latină. Dintre cei patru termeni, cel care pare să fie cel mai apropiat de ideea de libertate este paidia.

Un autor important în domeniul jocului este Roger Caillois, pe care l-am mai menţionat, în legătură cu cartea sa *Les jeux et les hommes* (Paris: Gallimard, 1958), unde propune o clasificare interesantă a jocurilor. Acest autor defineşte jocul ca o activitate cu următoarele trăsături (p.42-44): liber (jucătorul participă de bunăvoie, nu din obligaţie; altfel, jocul şi-ar pierde caracterul de divertisment atrăgător şi plăcut);separat (deci supus unor limite de spaţiu şi de timp precizate în prealabil); incert (evoluţia jocului nu este unic determinată, rezultatul jocului nu este cunoscut decât după încheierea sa, jucătorul îşi poate desfăşura iniţiativa şi invenţia); neproductiv (nu creează bunuri); reglementat (supus unor convenţii care suspendă legile obişnuite şi instaurează o legislaţie nouă, singura care contează în joc); fictivă (jocul presupune o conştiinţă specifică a unei realităţi secunde sau de pură irealitate în raport cu viaţa curentă). Toate aceste trăsături apar şi la Huizinga, chiar dacă în alte formulări, care implică nuanţe diferite.Ca şi la Huizinga, prima trăsătură se referă la libertatea de a opta pentru sau contra intrării în joc. Dar, spre deosebire de Huizinga, care nu discută aria de manifestare a libertăţii în interiorul jocului, Caillois o face în

legătură cu incertitudinea implicată de un joc. Desigur că indirect libertatea apare şi în legătură cu caracterul fictiv, aşa cum şi la Huizinga ea se află implicată în acţiunea evadării (2).

Două definiţii mai succinte ale jocului au fost propuse de Pierre Guiraud (*Les jeux de mots* (Collection „Que sais-je"? 1656, Presses Universitaires de France, Paris, 1976, p.97): „Pe de o parte, un joc este o activitate fizică sau mentală, pur gratuită, bazată în general pe convenţie sau pe ficţiune, care nu are, în conştiinţa aceluia implicat în activitatea respectivă, alt scop decât chiar această activitate şi plăcerea pe care aceasta i-o procură". Aici, sunt indicate ca sinonime: amuzament, divertisment, trecerea timpului. „Pe de altă parte, un joc este o activitate care prezintă una sau mai multe trăsături ale jocului: gratuitate, futilitate, benignitate, facilitate"; sunt indicate drept sinonime: glumă, bufonerie, păcăleală. Se mai adaugă observaţia că păcăleala şi amuzamentul care decurge au loc pe seama altuia. În nici una dintre aceste definiţii nu apare explicit libertatea. Dacă prima dintre aceste definiţii repetă în esenţă elemente existente în definiţii menţionate anterior, cea de-a doua aduce elemente noi, care ţin de sfera umorului şi a râsului, îmbogăţind latura de spectacol a jocului. Rămâne deci să explorăm în continuare resursele de libertate în interiorul propriu-zis al jocului.

Jocul ca libertate, în știință

În matematică, plecăm la drum cu un număr de termeni primitivi, de definiţii şi de axiome; alegerea acestora este rezultatul unor convenţii, deci al unei regii asemănătoare aceleia din teatru şi film. Desigur, intervin aici problemele pe care dorim să le abordăm şi exemplele pe care le avem în vedere, ca suport empiric şi intuitiv. Cuvântul cheie în formularea de mai sus este „alegerea". Actul de a alege este o formă fundamentală de libertate în activitatea unui cercetător ştiinţific. De exemplu, matematicianul dispune de o libertate totală în alegerea personajelor şi intrigii ficţiunii sale, totul se constituie ca un joc, singura

sa responsabilitate este aceea a coerenţei acţiunii sale, a sistemului pe care-l construieşte şi, eventual, a relevanţei în raport cu o anumită problemă. El are dreptul de a greşi, dreptul de a alege căi care ulterior se dovedesc a nu duce la nimic. Esenţa activităţii sale constă în faptul că numărul încercărilor, al tentativelor, poate fi incomparabil mai mare decât numărul reuşitelor; mai mult, nu se fixează nici o limită pentru numărul eşecurilor. Nenumăraţi sunt cei care au încercat să demonstreze sau să infirme că 8 şi 9 sunt singurele pătrate perfecte a căror diferenţă este egală cu unitatea, nimeni nu a reuşit, dar nimeni nu a fost sancţionat pentru un eşec de acest fel. Mai mult, nu se ţine nici o contabilitate oficială a acestor eşecuri. Nici a eşecurilor în încercarea de a lămuri natura constantei lui Euler (egală cu limita către care tinde, când n creşte, diferenţa dintre suma primilor n termeni ai seriei armonice şi logaritmul natural al lui n). În schimb, pentru alte probleme, cum ar fi problema celor patru culori sau problema lui Fermat, răspunsul a fost găsit, dar după un lung şir de încercări eşuate. În aceasta constă jocul ştiinţei; în dreptul de a greşi, de a eşua în mod repetat, nu ca în proverbul latin, care consideră diabolică perseverenţa în greşeală. Probabil că acest proverb trebuie înţeles în sensul perseverării în aceeaşi greşeală. Pe de altă parte, eşecul nu provine totdeauna din greşeală, el poate fi efectul alegerii unei căi nefericite.

Greşeala, ca preţ al creativităţii

În mod simetric, reuşita, ideea de aur, care aduce un aer de prospeţime într-o anumită problemă, sunt mai totdeauna obţinute cu preţul unor greşeli care, de cele mai multe ori, se dovedesc a fi benigne. Greşeala este preţul inevitabil care trebuie plătit pentru ca jocul ştiinţei să continue nestingherit, iar creaţia ştiinţifică să fie posibilă. O lectură atentă a istoriei ştiinţei arată că mai toate operele de pionierat au conţinut unele greşeli. Explicaţia? O idee nouă are nevoie de un anumit timp pentru a deveni şi un instrument de lucru. Pe de altă parte, confiscată de argumentarea şi motivarea unei idei centrale, atenţia la

alte aspecte şi la detalii poate slăbi. Primele lucrări ale lui Noam Chomsky (în special acelea din anii '50) privind gramaticile generative au conţinut greşeli tehnice, explicabile într-un moment în care ideea de gramatică generativă era încă foarte proaspătă. A fost necesar un proces de clarificare care s-a încheiat abia la sfârşitul anilor '60. Pe de altă parte, problemele privind adecvarea şi relevanţa acestor gramatici în studiul limbilor naturale s-au dovedit a fi şi ele delicate şi ceea ce părea lămurit în argumentarea lui Chomsky a trebuit să fie reluat în anii '80. Acesta este drumul sinuos al ştiinţei, cu întoarceri şi înaintări, cu ocoluri şi resemnări, cu compromisuri, dar şi cu succese care aduc bucurie în sufletul cercetătorilor, o bucurie pe care unii autori o văd asemănătoare bucuriei mamei care-şi contemplă copilul abia născut.

Eşecurile la care ne-am referit au şi ele gradul lor de relativitate. Ceea ce este un eşec în raport cu problema care s-a aflat în atenţie se poate dovedi folositor într-o altă direcţie. Kummer a eşuat în încercarea de a rezolva problema lui Fermat, dar acest eşec a prilejuit introducerea noţiunii de *ideal*, atât de importantă în algebra modernă. Tocmai în aceasta constă jocul ştiinţei: în libertatea de a lăsa gândul să hoinărească în voie, fără grabă şi fără presiuni exterioare, în direcţii stabilite numai de curiozitatea şi de imaginaţia cercetătorului.

Acest joc al creativităţii este însă liber de orice limitări în timp şi spaţiu, el se amestecă în viaţa cea mai prozaică a savantului, care poate fi vizitat şi chiar confiscat de o idee foarte inspirată în momentul în care cumpără o pâine sau se află sub duş. Psihologic, lucrurile se desfăşoară întocmai ca şi în jocul creaţiei artistice. Jocul creativităţii, de orice natură ar fi ea, este organic impregnat în „seriosul" şi „utilitarul" vieţii cotidiene, el stăpâneşte cu egală putere starea de veghe şi starea de somn, conştientul şi subconştientul. Spre deosebire de jocurile convenţionale, pe care în mare măsură jucătorul le ţine sub control, jocul creaţiei artistice sau ştiinţifice pune el stăpânire pe jucător (adică pe artist sau pe savant).

Starea de vertij în știință

Copilăria este fermecată de starea de ameţeală pe care o produc jocuri ca toboganul şi caruselul, scrânciobul şi săniuţa. Cei care au vizitat mari parcuri de distracţie de tipul Disney Land (în California) sau Disney World (în Florida) au putut vedea până la ce proporţii poate creşte starea de extaz, de încântare şi de adevărată beţie a simţurilor şi a impresiilor pe care o pot procura acele maşini care ne transportă în universurile mirifice ale unei imaginaţii debordante, de paradis, de mister sau de groază. În aceeaşi lume a jocului se situează marile carnavaluri din ţările de limbi latine, dar la acestea accentul principal pare a se situa pe mijloacele deghizării şi mascaradei, ale reprezentărilor alegorice şi ale bufoneriei.

Există un corespondent al acestora în ştiinţă, care prin austeritatea ei pare incompatibilă cu tot ce ne scoate din starea de luciditate maximă? La prima vedere, răspunsul este negativ, întrebarea putând să pară chiar nepotrivită. Să încercăm totuşi să reflectăm asupra acestei probleme. Ce a vrut să spună marele matematician Marston Morse prin afirmaţia:„Matematica este sora şi auxiliara necesară a artelor şi este atinsă de nebunie şi geniu?“ Despre legătura strânsă dintre matematică şi artă s-a scris foarte mult, am publicat şi noi câteva cărţi (*Poetica matematică*, 1970; *Artă şi ştiinţă* 1986; *Invenţie şi descoperire* 1989), şi multe articole; aici însă avem în vedere partea a doua a afirmaţiei lui Morse, care pretinde că matematica este atinsă de nebunie şi geniu. Nu este vorba aici de nebunia propriu-zisă, care ţine de patologie, ci de acea nebunie metaforică prin care marcăm o formă de superlativ a stărilor omeneşti şi a creaţiilor umane. Ştiinţa a cunoscut astfel de momente de vârf, care au rămas termeni de referinţă în istoria speciei umane, la fel ca şi momentele similare din istoria artei. Avem în vedere aici momentele de mare emoţie, care au surprins inteligenţa umană prin fapte care se plasau în afara oricăror aşteptări. Un moment de acest fel a fost acela în care Pitagora a descoperit că diagonala unui pătrat nu este comensurabilă cu latura pătratului. Atunci a început criza

iraţionalelor, căreia nu i s-a pus capăt decât peste aproximativ 2000 de ani (în partea a doua a secolului al XIX-lea, când s-a creat conceptul riguros de număr real, incluzând ca un caz particular pe acela de număr iraţional). Un moment de acest fel a fost apariţia geometriilor neeuclidiene, în prima jumătate a secolului al XIX-lea. A fost un şoc intelectual, deoarece se situa împotriva tuturor obişnuinţelor acumulate de milenii. Concomitent, un alt şoc se produce în algebră; în mod tradiţional, se considera că rezolvarea unei ecuaţii algebrice este o problemă strict cantitativă, numerică, de descoperire a unei formule de evaluare a rădăcinilor ecuaţiei. Se cunoşteau procedee de acest fel pentru ecuaţiile de grad mai mic sau egal cu 4. Contrar tuturor aşteptărilor, N.H.Abel demonstrează că ecuaţia de gradul al V-lea nu admite o formulă generală de evaluare a rădăcinilor, cu ajutorul unor operaţii algebrice elementare, inclusiv extragerea unor rădăcini de diverse ordine. Ca şi cum această surpriză nu era suficientă, urmează o surpriză şi mai mare: Évariste Galois explică de ce pentru ecuaţiile algebrice de grad superior lui 4 nu există formule generale de rezolvare, aşa cum se întâmplă la ecuaţiile de grad inferior lui 5. Galois reuşeşte să caracterizeze ecuaţiile algebrice rezolvabile prin radicali, dar această caracterizare este de natură pur calitativă şi face apel la o noţiune introdusă de Galois chiar în acest scop: noţiunea de grup de permutări. A fost un moment de adevărată perplexitate, nimeni nu se aştepta la o turnură de acest fel în algebră. Ideea de grup a schimbat faţa matematicii.

Exemplele de acest fel pot continua. Teoria gravitaţiei universale, izomerismul chimic, teoria relativităţii, mecanica cuantică şi descifrarea codului genetic sunt şi ele evenimente ştiinţifice care se înscriu în orice istorie culturală a omenirii. Dar de această dată ne interesează aspectul pur estetic şi ludic al acestor splendori ale spiritului uman. Contemplarea lor ne ameţeşte, ne umple de emoţie, e un aer prea tare la aceste înălţimi ale creaţiei. În prezenţa lor, starea de vertij se asociază cu un sentiment al perfecţiunii. Desigur, cei care nu au acces intelectual la ele pot să rămână miraţi la aceste aprecieri, dar toate mărturiile oamenilor de ştiinţă le confirmă. Prin ceea ce are ea mai înălţător, ştiinţa este atinsă de nebunie şi de geniu.

Gratuitate, constrângere și spectacol în jocul științei

Știința a putut să dea impresia opusă gratuității din cauza prezentării ei tendențioase, cu accent pe funcția ei utilitară. Nu se poate nega acest aspect al științei, dar el este unul derivat, nu cel principal. Din punctul de vedere al celor care creează știința, atitudinea cea mai avantajoasă este aceea de joc intelectual, care dă curs întrebărilor și mirărilor firești ale unui cercetător, în prelungire naturală a atitudinii fundamental interogative a copilului și adolescentului. Deosebirea față de jocurile standard, de tipul tenisului sau al șahului, se află în faptul că știința nu pleacă la drum cu reguli prestabilite de o altă instanță, ci se instituie chiar pe parcurs anumite reguli, parte preluate de la autori anteriori, parte din proprie inițiativă. S-ar putea ca cel puțin unele dintre aceste reguli să nu aibă caracterul explicit din jocurile sportive, de exemplu. Este deci un joc care se definește pe măsură ce este jucat. Atent la toate condițiile problemei de care se ocupă, omul de știință explicitează singur constrângerile la care trebuie să se supună, restrângându-și astfel libertatea cu care a plecat la drum; dar face toate acestea din proprie inițiativă, cu conștiința supunerii la obiect (pentru a folosi o expresie dragă poetului-matematician Dan Barbilian). Gratuitatea întreprinderii sale constă în faptul că nu e condus decât de propria sa curiozitate, de plăcerea de a sonda necunoscutul. Satisfacțiile sunt în primul rând de natură ludică.

„Intriga" (adică problemele și teoremele) în care sunt implicate „personajele" (adică termenii primitivi, axiomele și definițiile) unui matematician devine azi mai spectaculoasă decât în trecut, deoarece tot mai multe adevăruri matematice surprind intuiția prin fapte cu totul paradoxale. Aceasta se întâmplă nu numai în matematică, ci și în fizică, chimie, biologie, pentru a nu mai vorbi de logică și de științele informației. Cam de o sută de ani încoace, știința este tot mai antiintuitivă, conflictul ei cu simțul comun este în creștere. Faptul acesta îi mărește atractivitatea, caracterul de surpriză, deci se accentuează și caracterul ei ludic, de spectacol.

Un alt element care măreşte teatralitatea ştiinţei este prezenţa crescândă a diferitelor tipuri de tendinţe conflictuale. Avem în vedere aşa-numitele cupluri conjugate de acţiuni care se află într-o anumită tensiune, una dintre ele neputându-se dezvolta decât pe seama celeilalte. (O tratare sistematică a acestei chestiuni se află în articolul nostru *No system can be improved in all respects*, în „Systems. New Paradigms for the Human Sciences" (eds. G. Altmann, W.A.Koch), Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1998, 143-164). Fenomenul a apărut mai întâi în fizică. Principiul incertitudinii, al lui Heisenberg, afirmă că nu pot fi măsurate simultan, cu oricâtă acurateţe dorim, atât poziţia cât şi viteza unui obiect cuantic, cum ar fi un electron. Măsurarea poziţiei se face pe seama acurateţei măsurării vitezei şi reciproc. Tot aşa, în teorema de incompletitudine a lui Gödel condiţia de completitudine a unui sistem poate fi satisfăcută numai dacă se sacrifică proprietatea de necontradicţie a sistemului şi reciproc. Într-o tensiune similară se află timpul computaţional şi spaţiul computaţional (memoria calculatorului).

Precizia poate dăuna adevărului şi reciproc (Am sosit la orele 17.01" riscă să fie o afirmaţie mincinoasă; mai prudentă este afirmaţia: „Am sosit în jurul orei 17"). Cu cât este mai riguros un model matematic, cu atât mai puţin se apropie de realitate; cu cât mai mult se apropie de realitate, cu atât mai puţin este riguros. Orice progres în înregistrarea proprietăţilor sensibile ale obiectelor se face pe seama clarităţii descrierii lor. O tensiune similară are loc uneori între sintaxa şi semantica unui limbaj.

O altă sursă de creştere a atractivităţii ştiinţei, sub aspectul ei ludic, îl constituie faptul că tot mai mult logica ştiinţei nu mai este logica aristotelică a necontradicţiei, identităţii şi terţului exclus, ci o încălcare, într-un fel sau altul, a acestei logici. Este astfel deschisă calea spre paradox iar paradoxul nu şi-a ascuns niciodată aspectul său ludic, aspect care a constituit de mai multe ori o piedică în înţelegerea sa.

În sfârşit, criza limbajului ştiinţific este şi ea o sursă puternică de pătrundere a ludicului în ştiinţă. Spărtura care s-a creat între acest limbaj

şi limbajul uman s-a mărit mereu, iar ştiinţa recurge la tot felul de compromisuri pentru a micşora acest decalaj. Unul dintre aceste compromisuri este, aşa cum am mai observat, metafora. Dar metafora cognitivă este de cele mai multe ori circulară. Nu se modelează un obiect preexistent, ci o entitate care se conturează chiar prin procesul metaforic. Acesta este mecanismul metaforei ştiinţifice în numeroase situaţii fundamentale, aşa cum am arătat în unele studii anterioare (a se vedea, de exemplu, *Metaphor as dictatorship*, în J.Bernard et al. (eds), World of Signs-World of Things. Östereichischen Geselschaft für Semiotik, Wien, 1997). Este uşor de înţeles că procese metaforice circulare de acest fel, care intervin sistematic, nu accidental, în itinerarul de instaurare a unor concepte ştiinţifice noi, constituie o sursă bogată de joc şi de spectacol, un numitor comun al ştiinţei, artei şi filozofiei.

Tot ceea ce urmează în această carte se înscrie, într-un fel sau altul, în programul trasat în capitolul de faţă: ştiinţa ca joc, jocul ca obiect al ştiinţei, greşeala şi paradoxul ca asociaţi naturali ai jocului.

Pariul jocului ca libertate merită să fie jucat.

De altfel, multe lucrări anterioare vin, mai mult sau mai puţin explicit, în sprijinul ideilor noastre. Pentru a da un singur exemplu, în lucrarea dedicată de Gheorghe Păun jocului Go se menţionează relevanţa acestui joc în unele probleme „serioase"; la fel procedează şi în alte lucrări ale sale despre jocuri.

În labirintul semnelor, cu Umberto Eco

L-am întâlnit prima oară pe Umberto Eco în iulie 1973, la Seminarul organizat anual de Centrul Internaţional de Semiotică şi Lingvistică al Universităţii din Urbino, Italia, unde fusesem invitat să fac un ciclu de expuneri privind semiotica teatrului. Modul de abordare al grupului român de teatrologie matematică reţinuse atenţia lui Eco, preocupat şi el pe atunci de semiotica teatrală; s-a şi referit, într-una din scrierile sale, la metoda noastră de studiere a strategiei personajelor dramatice. Teatrul este pentru Umberto Eco o modalitate frecventă de

prezentare, indiferent de natura subiectului tratat. Are o adevărată vocaţie a punerii în scenă, a conflictului scenic; el vede lumea ca teatru.

În 1974 m-a invitat să prezint o conferinţă în şedinţa plenară la Primul Congres al Asociaţiei Internaţionale de Semiotică (Milano), al cărui organizator şi preşedinte a fost. Ca şi în alte cazuri similare, am primit paşaportul abia după încheierea congresului. În preajma congresului, Eco m-a sunat la telefon la Bucureşti, în legătură cu prezenţa mea la congres. Nu aveam voie să spun că nu am primit paşaportul şi i-am spus că sunt bolnav. Dar, după cum am aflat ulterior, Eco a informat Congresul că Marcus e bolnav de paşaport.

Acest procedeu ingenios de folosire a limbajului este caracteristic pentru gândirea semiotică a lui Umberto Eco, gândire care ne dă şi ea cheia romanului său *Numele trandafirului*. Cred că acest roman trebuie citit concomitent cu Tratatul său de semiotică generală (tradus şi în româneşte). Eco este un exemplu rar de personalitate literară şi ştiinţifică în acelaşi timp, omul de ştiinţă putând fi detectat în operele sale literare, iar scriitorul fiind prezent în textele sale ştiinţifice (printr-o fantezie debordantă şi prin proliferarea unor metafore dintre cele mai îndrăzneţe).

În concepţia lui Umberto Eco, semnul este o prezenţă care dă seama despre o absenţă. Pe acest temei, el consideră că semiotica este o disciplină care explică posibilitatea minciunii şi mecanismul ei de funcţionare. Ideea lui Charles Sanders Peirce privind infinitatea procesului de semioză l-a contaminat puternic pe Eco. Această infinitate are în vedere triada „primeitate-secondeitate-terţeitate“, interpretată ca semn definit prin triada „reprezentant-obiect-interpretant“, unde interpretantul devine, la rândul său, reprezentantul unui nou semn ş.a.m.d. De exemplu, semnul reprezentat de triada „cuvântul cal-calul ca animal-noţiunea de cal“ generează prin interpretantul „noţiunea de cal“ un nou semn, iar procesul continuă în acest fel la infinit. Semnul nu vine deci niciodată singur, ci în cohorte infinite, suntem asediaţi de semne care dau seama despre alte semne care, la rândul lor, trimit la nişte semne, procesul continuând la nesfârşit.

Aceste principii semiotice structurează întreaga desfăşurare a romanului lui Eco. Chiar titlul romanului trimite la o mediere semiotică (actul de numire). În centrul atenţiei se află cărţile, aglomerări de semne, şi bibliotecile, aglomerări de aglomerări de semne. Fiecare carte trimite la alte cărţi, iar când nu mai au la ce cărţi să trimită se raportează la manuscrise „cu o frumoasă caligrafie", care, la rândul lor, au fost copiate după alte manuscrise; şiruri nesfârşite de copişti şi caligrafi se conturează spre un trecut tot mai nebulos. Nu eventualul original interesează, ci semioza infinită, la care nu mai putem deslusi nici începutul, nici sfârşitul. Dar eroii romanului lui Eco sunt încredinţaţi că „nu există scriere secretă care să nu poată fi descifrată" (p.167) „semnele necromantice", „semne misterioase" (p.165), „criptografia" (p.166), „zodiacul" (p.161), „alfabete secrete" (p.166) reţin tot mai mult atenţia. Întregul roman e o continuă căutare a cărţii, emblematică fiind formularea „Datoria mea era să apăr biblioteca" (p.466), fapt explicabil prin relaţia carte-bibliotecă şi prin capacitatea bibliotecii de a exprima holografic lumea: „m-am convins că biblioteca era într-adevăr făcută şi împărţită după imaginea lumii pământeşti" (p.320). Iată deci un itinerar fascinant: de la lume la bibliotecă, de la bibliotecă la alte biblioteci, de la acestea la cărţi, de la cărţi la alte cărţi, la manuscrise care trimit la alte manuscrise şi aşa mai departe, din nou la lume. Ne amintim de paradoxul bibliotecii: poate exista o bibliotecă în care să putem găsi cataloagele tuturor bibliotecilor? Nu, deoarece o atare bibliotecă, fie ea B, ar trebui să conţină şi propriul ei catalog C(B), dar atunci s-ar obţine o nouă bibliotecă, formată din reuniunea dintre B şi C(B), reuniune care, la rândul ei, ar avea nevoie şi ea de un catalog C(B + C(B)) ş.a.m.d.

Descifrarea devine astfel o operaţie primordială. Se reconstituie istoria bibliotecarilor. Drumul spre carte (p.320-322), spre bibliotecă, devine tot mai anevoios, un adevărat labirint, în timp ce cartea însăşi este un labirint, lectura devine şi ea tot mai dificilă, „e nevoie de sticle pentru citit fantomele care-i apar celui ce vrea să citească prea mult".

Biblioteca devine astfel un labirint de labirinturi. Obsesia treptelor, a scărilor tot mai numeroase, a porţilor şi uşilor („uşa grea de lemn" (p.162), „uşi zăvorite" (p.16), a orificiilor, a corpurilor delicte, misterioase, tipice romanului poliţist, ne scufundă într-un labirint tot mai ameninţător, întreaga povestire este dominată de metafora labirintului; era greu de găsit o metaforă mai potrivită pentru semioza infinită care-l preocupă pe autor.

Romanul lui Eco este romanul unei deveniri nesfârşite, în care ne depărtăm tot mai mult de semnele lumii, pentru a le înlocui cu semnele altor semne. Realitatea primă se estompează, în favoarea unui proces iterativ de generare a unor semne de ordin tot mai ridicat. Comunicarea despre lume devine comunicare despre comunicare.

(Trimiterile la pagini au în vedere ediţia publicată de Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1984).

CAPITOLUL II
GOOOOOOOOOl!
FOTBALUL, SPORTUL-REGE

Metafora fotbalistică

Marcarea unui gol este un moment culminant, de adevărat vertij, prin care fotbalul se detaşează de orice alt sport de echipă, de orice alt tip de competiţie sportivă, într-o anumită arie geografică a planetei noastre. Momentul de gol rezumă esenţa jocului de fotbal şi în acelaşi timp explică formidabila sa capacitate metaforică. Fotbalul este o întreagă lume, iar lumea este, în anumite privinţe, un meci de fotbal. Desigur, goluri se marchează şi în alte jocuri sportive, dar numai în fotbal conduc ele la acea ameţeală generală a jucătorilor şi a spectatorilor, un adevărat climax care dezlănţuie imense energii.

„Ministrul şi-a marcat astfel un punct în propria-i poartă", „... se pune şi întrebarea dacă Protocolul din 5 februarie constituie sau nu un punct marcat de PD în poarta Convenţiei", „Meciul dintre Convenţie şi PD a continuat şi în această săptămână, „Senatorul s-a aflat astfel în poziţie de ofsaid", „Mingea se află acum la partea adversă", „Cu FMI-ul am dat-o în bară". Situaţiile critice ale jocului de fotbal constituie o sursă metaforică inepuizabilă pentru cele mai diverse situaţii de viaţă, iar exemplele menţionate, toate de dată relativ recentă, privind scena politică românească, sunt numai o palidă ilustrare. Prin acestea, fotbalul nu face decât să restituie vieţii ceea ce el a luat din viaţă, prin chiar modul în care a fost conceput, structurat şi practicat.

Este capacitatea de a genera transferuri metaforice mai mare în cazul fotbalului decât în cazul altor sporturi, cum ar fi boxul („lovitura sub centură" a devenit una dintre cele mai celebre metafore sportive)

sau şahul (a se vedea universalitatea situaţiilor de mat sau de pat, a manevrei de rocadă şi a pieselor numite pioni)? Pentru a răspunde la această întrebare, ar fi nevoie de o cercetare specială; a fost ea cumva întreprinsă?

Ceea ce îi conferă fotbalului o superioritate clară este productivitatea metaforică spontană a publicului de fotbal. Îmi aduc aminte că în anii '70 un italian, Paolo Dona, venise la Bucureşti pentru a studia acest fenomen în desfăşurarea sa naturală, în tribunele meciurilor de fotbal, rezultatele urmând să fie folosite într-o teză dc doctorat despre limbajul fotbalistic. Îmi arătase liste nesfârşite de porecle pe care spectatorii le dădeau jucătorilor, arbitrilor, antrenorilor sau altor spectatori (în special suporterilor echipei adverse).

Freamătul unui stadion aflat sub atracţia magnetică a unui meci în plină desfăşurare, a cărui miză nu este neglijabilă, oferă un spectacol unic. Omul din tribună are nevoie de întreaga tribună pentru a dobândi inventivitate de limbaj şi un simţ dilatat al umorului, el are nevoie de întreaga masă de spectatori pentru a-şi dezlănţui verva metaforică, tot aşa cum albatroşii lui Baudelaire au nevoie de întregul văzduh pentru a-şi demonstra eleganţa zborului.

Fotbalul a fost recunoscut drept sportul-rege. Copilăria, adolescenţa şi tinereţea mi-au stat sub vraja sa, iar acum, după un şir de ore petrecute printre cărţi şi hârtii sau la pupitrul calculatorului, nu cunosc destindere mai plăcută decât urmărirea unui meci de fotbal de calitate, chiar dacă acest lucru se întâmplă în faţa ecranului de televizor şi nu la locul de desfăşurare. Aflându-mă, în ultimii ani, de mai multe ori în Brazilia, unde anumite canale dc televiziune transmit fotbal 24 de ore din 24, am înţeles modul în care atitudinea publicului faţă de fotbal poate fi cheia înţelegerii temperamentului unui popor. Creativitatea metaforică a crainicului care transmite un meci, capacitatea sa de a se entuziasma sau de a fi dezamăgit, de a fi trup şi suflet cu stadionul sunt cele ale unui mare actor. Momentul brazilian al marcării unui gol este prelungit de crainic printr-o exclamaţie de cel puţin 30 de secunde, în contextul unui adevărat vacarm al tribunelor; titlul reflecţiilor de faţă încearcă să sugereze intensitatea acestui moment.

De la foot-ball la fotbal

Faţă de atâtea răsturnări care m-au marcat (democraţie, fascism, război, holocaust, comunism, gulag, căderea comunismului), printre puţinele atitudini constante, care au rezistat tuturor intemperiilor istoriei, s-a aflat şi nevoia de fotbal. Copil, urmăream evoluţia unor echipe ca Ripensia, Venus, Juventus şi CAO Oradea. Zeii mei erau Bodola, Dobai, Baratki, Bindea şi alţii ca ei. În anii treizeci se scria încă „foot-ball", ca în engleză, dar, evident, cei mai mulţi ignorau pronunţia corectă şi citeau aşa cum se scrie acum: fotbal. Evoluţia spre actuala scriere a fost lentă, nu mai ţin minte acum fazele ei intermediare, dar acest exemplu este elocvent pentru modul în care, în limbă, greşelile de ieri pot deveni regulile de azi, ceea ce ne face să bănuim că multe greşeli de azi vor deveni cândva reguli. În legătură cu acelaşi cuvânt „fotbal", apare acum şi un fenomen de hipercorectitudine; unii se ambiţionează să-l pronunţe şi azi ca în engleză (aşa cum s-a întâmplat cu unul dintre participanţii la o discuţie despre sport, în cadrul unei emisiuni de televiziune la PRO TV, într-o seară din februarie 1998). O situaţie interesantă o prezintă şi substantivul „gol", provenit din englezul „goal", care se pronunţă aproximativ „goul", cu un „u" abia perceput şi care în româneşte a devenit, cum era de aşteptat, cuvântul atât de popular pe care îl cunoaştem. În aceste condiţii, noua funcţie, de substantiv, a cuvântului pe care toată lumea îl cunoaşte ca adjectiv antonim al cuvântului „plin" avea să conducă aproape inevitabil la etimologia populară care explică substantivul prin adjectivul omonim; l-am auzit pe un spectator la un meci, explicând odraslei sale: a marcat un gol, adică a găsit în poartă un gol, nepăzit de portar. Etimologia corectă a cuvântului „gol" este însă plină de tâlc şi ne duce la esenţa jocului de fotbal. „Goal" înseamnă în engleză „scop", „ţintă" şi exprimă faptul că fotbalul simobilizează acele acţiuni umane care au o finalitate clară şi precisă, a cărei eficacitate se poate determina fără ambiguitate. În orice caz, în contrast cu „fotbal", a cărui pronunţare e sensibil diferită de aceea a cuvântului englezesc din care provine, cuvinte ca

„gol" şi „ofsaid" (în engleză: off-side) sunt mai apropiate de pronunţia din engleză. Şi-au spus cuvântul atât tendinţa limbii române de a se citi aşa cum se scrie cât şi faimosul principiu al minimului efort, care impune, în general, expresiile cele mai scurte pentru cuvintele cele mai frecvente.

În anii treizeci, unul dintre cuvintele cele mai populare, impuse de jocul de fotbal, era verbul „a dribla" (provenit din „to dribble"), preluat repede de limbajul cotidian, în care devenise o metaforă a situaţiilor în care A îl păcăleşte pe B, îl întrece în dibăcie. Unul dintre marile puncte de atracţie ale fotbalului este situaţia în care un jucător marchează un gol, după ce a driblat doi sau trei jucători ai echipei adverse. De aceea, golul simbolizează eficacitatea acţiunii umane cu scop bine determinat şi în condiţii de competiţie; nu este exact acesta dezideratul major al lumii actuale?

Fotbalul în regimul totalitar

În regimul totalitar, fotbalul devenise o adevărată oază. Stadioanele de fotbal, rubricile de fotbal din ziare erau aproape singurele insule de relativă libertate, unde comportamentul nostru se apropia de normalitate. În aceste condiţii, era aproape inevitabil ca tot ceea ce nu era permis în viaţa cotidiană să-şi caute o compensaţie pe stadionul de fotbal, situaţie care stimula şi favoriza transferurile metaforice cele mai îndrăzneţe. Meciul de fotbal era aproape silit să funcţioneze ca o metaforă a meciului pe care dictatura îl purta cu cea mai mare parte a populaţiei. Cu cât erau mai insuportabile restricţiile impuse în viaţa socială, cu atât erau mai exploatate libertăţile comentariului sportiv; în aceste condiţii, tot mai mulţi scriitori s-au simţit atraşi de cronica fotbalistică, pentru a-şi transfera acolo libertatea de gândire; iar acum, când nu mai e nevoie de acest refugiu, observaţi cum s-a micşorat sensibil numărul scriitorilor atraşi de această activitate. În plan sincronic, fotbalul era într-adevăr un refugiu asemănător aceluia reprezentat în plan diacronic de trecutul îndepărtat (istoria devenise pentru mulţi scriitori o metaforă a prezentului).

Exista, însă, în regimul totalitar, şi o altă faţă a medaliei. Ca profesor de universitate, mi s-a întâmplat de mai multe ori să am ca studenţi sportivi de performanţă, de la Lia Manoliu, studentă la Energetică la începutul anilor cincizeci, până la campioana de şah Pogorevici, studentă la matematică în anii optzeci. Este un lucru obişnuit la noi ca în preajma unui examen unele persoane să se intereseze de situaţia unor studenţi care urmează a fi examinaţi. Acest fenomen rămâne însă în limitele unei normalităţi, dacă se poate spune aşa. La un moment dat mi-a devenit studentă soţia unuia dintre cei mai buni portari de fotbal ai ţării, chiar cel care, în acea perioadă, era şi portarul echipei naţionale. În preajma sesiunii de examene începusem să simt că deveneam o persoană din ce în ce mai importantă, căutată de rectorul Universităţii, de conducerea Federaţia Române de Fotbal şi de persoane din conducerea Comitetului Naţional de Cultură Fizică şi Sport, cum, dacă nu mă înşeală memoria, se numea pe atunci organul suprem de specialitate; nu lipseau, firește, telefoanele din partea unor foruri de partid (lucrurile se întâmplau prin anii '60); toţi se interesau de examenul la care urma să se prezinte soţia celebrului fotbalist. Mi-am dat seama că fotbalul pune în mişcare nu numai mase imense de „microbişti", ci şi întreaga birocraţie de partid şi de stat; iar cum într-un viitor apropiat echipa României urma să susţină un meci cu miză foarte importantă în compania Iugoslaviei, poarta României urmând să fie apărată chiar de soţul studentei care se afla în centrul atenţiei, mă simţeam aproape răspunzător de soarta acelui meci şi, implicit, de prestigiul României în lume. Nu bănuisem niciodată că activitatea mea ca profesor de matematică ar putea avea un asemenea impact.

Cazul lui Harald Bohr

Cum s-a putut ajunge la această situaţie? Fotbalul nu este totuşi decât un joc. Plăcerea jocului pare străină de orice finalitate practică şi de oricare dintre problemele grave ale umanităţii şi ale ţării. Dacă acesta este jocul în punctul său de plecare, ştim acum că, în anumite cazuri,

iar fotbalul se află prin excelenţă în această situaţie, jocul evoluează spre contrariul său, implicând imense orgolii şi mari sume de bani. Gravele acte de violenţă care au avut loc de mai multe ori în ultimii ani pe diferite stadioane occidentale şi povestea echipei Olympique Marseille sunt semnificative în această privinţă; iar cine doreşte să se edifice asupra dimensiunii româneşti a acestei probleme să urmărească „Procesul etapei“ la PRO TV.

În ciuda acestor denaturări ale fotbalului, componenta sa de joc şi de inteligenţă rămâne preponderentă. Impresia, destul de răspândită, după care fotbalul ar fi o activitate potrivită persoanelor puternice fizic, dar slabe intelectual (s-a speculat contrastul dintre cap şi picior, primul simbolizând inteligenţa, iar cel de al doilea forţa fizică) trebuie amendată. Este adevărat că fotbalul, ca sport de masă, este practicat de multă lume certată cu învăţătura şi cultura, dar marii jucători de fotbal au ajuns la performanţă printr-o fericită articulare a forţei şi inteligenţei. Dintre numeroasele exemple de mari intelectuali care au practicat şi iubit fotbalul, fie-mi îngăduit, ca matematician, să-l amintesc pe Harald Bohr (fratele celebrului fizician Niels Bohr), un mare matematician danez, creatorul teoriei funcţiilor aproape periodice. El a jucat în echipa Danemarcei la Jocurile Olimpice din 1908; această echipă obţinuse medalia de argint şi este menţionată în cartea lui Bill Malton, *The Olympic Record Book* (Garland Publ., New York, p. 172) pentru cel mai mare scor realizat într-un singur joc, cel împotriva Franţei, pe care o învinsese cu 17 la 1. La noi în ţară matematicieni ca Octav Onicescu şi Nicolae Teodorescu s-au interesat de mişcarea fotbalistică, au sprijinit-o şi se pare că au şi practicat fotbalul.

Preliminarii teoretice

Este acum momentul să trecem la întrebări mai substanţiale. Care este statutul fotbalului? În ce constau structura sa, natura sa conflictuală? Cum se explică faptul că el se menţine ca sport-rege pe o imensă întindere a planetei, în ciuda competiţiei aprige în care se află cu alte

sporturi devenite foarte populare? Căutând în cărţi celebre un răspuns la aceste întrebări, vom rămâne destul de dezamăgiţi. La o reflecţie directă asupra fotbalului înainte de secolul al XX-lea nici nu ne-am fi putut aştepta; dar nici măcar jocurile sportive în genere nu au beneficiat de atenţia cuvenită din partea celor care au fost preocupaţi de natura jocului. Pentru a ne referi la un studiu devenit celebru (existent şi în versiunea românească), în *Home ludens* al lui Johan Huizinga nu lipsesc paginile consacrate jocurilor fizice, dar sportul nu beneficiază de o analiză profundă, pe măsura nivelului general, foarte ridicat, al acestei lucrări.

Va trebui să distingem între două aspecte fundamentale ale jocului, greu exprimabile în limba română (ca şi în limba franceză de altfel), unde cuvântul „joc" trebuie să acopere (pentru a ne referi la limba engleză) atât semnificaţia de „game" cât şi pe cea de „play". Să amintim că patru trăsături par esenţiale în activităţile pe care le avem în vedere sub denumirea de „jocuri": caracterul agreabil, natura imprevizibilă, aspectul problematic şi cel de strategie. Desigur, ponderea cu care participă fiecare dintre aceste trăsături diferă de la un joc la altul. Dacă agreabilul rămâne deocamdată o categorie mai degrabă psihologică, pe care nu ştim încă s-o descriem într-un mod mai riguros, imprevizibilul, problematicul şi strategicul fac obiectul unor discipline ştiinţifice prestigioase, ca teoria informaţiei (vizând imprevizibilul), inteligenţa artificială (vizând problematicul) şi teoria matematică a jocurilor (vizând strategicul). Am detaliat această idee în capitolul I. Pe de altă parte, Roger Caillois (*Les jeux et les hommes*, Gallimard, Paris, 1958) se referă la jocurile copiilor, pe care le repartizează în patru categorii, după cum sunt dominate de competiţie, de şansă, de simulare sau de vertij. Distincţiile operate de Caillois sunt relevante nu numai pentru jocurile copiilor, ci şi pentru cele ale adulţilor, aceştia din urmă având nevoie, ca şi copiii, de şansă şi de vertij şi simţindu-se atraşi de competiţie şi de simulare. Putem corela clasificarea lui Caillois cu cele patru trăsături ale jocurilor prezentate mai sus; competiţia este dominată de strategie, şansa se asociază cu imprevizibilul, simularea se asociază cu problematicul şi cu agreabilul, iar vertijul este forma supremă

a agreabilului. Jocul este în acelaşi timp o articulare a elementului „paidia“ (libertate, improvizaţie, sprinteneală, vacarm, râs necontrolat) şi a elementului „ludus“ (joc cu gustul dificultăţii practice).

Complexitate şi finețe

Unde se plasează, în raport cu toate aceste distincţii, fotbalul? El este, evident, agreabil atât pentru jucători cât şi pentru spectatori. Are un caracter imprevizibil, poate cu cea mai mare entropie informaţională (în raport cu alte jocuri sportive de echipă), rezultând atât din mărimea terenului şi din numărul mare de jucători, cât şi din traiectoria plină de surprize a balonului; într-adevăr, fotbalul este singurul joc sportiv de echipă în care mingea este jucată exclusiv cu piciorul (cu excepţia portarului şi a aruncărilor de la margine), iar traiectoria mingii trimise cu piciorul este mai puţin precisă decât a celeia trimise cu mâna, ca în volei, baschet şi, parţial, în rugby. În aceste condiţii, s-ar putea ca entropia jocului de fotbal să fie superioară entropiei altor jocuri sportive de echipă, fapt care ar explica gradul ridicat de spectaculozitate al jocului de fotbal. Suntem însă, în această privinţă, în domeniul ipotezelor, numai o cercetare ulterioară ar putea aduce lumină (sau cumva această cercetare a fost făcută şi nu avem cunoştinţă de ea). Caracterul problematic al fotbalului provine din mai multe direcţii. Îmi aduc aminte, din anii '60, de o teză de doctorat în sport, având ca temă situaţiile de ofsaid, şi de o alta, despre lovitura de la 11 metri. Diagnosticarea acestor situaţii pune probleme delicate de arbitraj şi generează multe conflicte. Mutarea jocului de pe o parte pe alta a terenului şi schimbarea bruscă a direcţiei de joc sunt numai două dintre situaţiile de maximă imprevizibilitate. Caracterul problematic are şi o importantă latură psihologică. Jucătorul trebuie mereu să evalueze aşteptările adversarului, pentru a le înşela; forţa şutului, stăpânirea balonului şi viteza în deplasare trebuie mereu asociate cu finețea observaţiei psihologice, imaginaţia şi gradul de colaborare cu coechipierii. Componenta strategică este şi ea esenţială; fotbalul se încadrează în

clasa aşa-numitelor jocuri de sumă nulă, orice avantaj sau câştig al unei echipe constituie un dezavantaj sau o pierdere de mărime similară, pentru cealaltă echipă; s-ar putea totuşi ca această afirmaţie să necesite unele nuanţări, dar probabil că ele nu ating caracterl predominant de sumă nulă al fotbalului. Caracterul competitiv al fotbalului îl stimulează pe jucător să se autodepăşească, dar în acelaşi timp se află la baza marilor ambiţii şi sume de bani pe care fotbalul le pune în mişcare, de multe ori în conflict cu aspectul său ludic. Competiţia fotbalistică, mai mult decât orice altă competiţie sportivă, a fost de multe ori aşezată la remorca unor politici extremiste şi a fost exploatată în acest sens de tot felul de mişcări antidemocratice, mergând până la alimentarea urii dintre diferite provincii ale aceleiaşi ţări. Violenţa pe stadioane a mers mână în mână cu agresivitatea discursului politic.

Fotbalul, între ordine şi hazard

Ajungem astfel la unele dintre punctele cele mai delicate: poate fotbalul de performanţă să-şi menţină caracterul său competitiv fără a-l compromite ca spectacol şi fără a-i atinge gratuitatea sa ludică? Este clar că ne aflăm în faţa unor cerinţe care, într-o anumită măsură, se sabotează reciproc. Diferite cerinţe formulate la adresa fotbalului se află într-o situaţie parţial cooperativă, sinergetică, dar parţial conflictuală. Acest caracter sistemic al jocului de fotbal a fost el oare studiat în reala sa complexitate? Să mai observăm că fotbalul se detaşează de alte jocuri sportive prin starea de ameţeală, de vertij de tipul scrânciobului de copii şi al spectacolelor de circ, la aceasta contribuind interacţiunea (fără egal în alte sporturi) jocului propriu-zis cu spectatorii săi. Fotbalul este o adevărată beţie, în sensul cel mai uman al acestui cuvânt, o stare vecină cu uşoara nebunie pe care o încearcă un creator în procesul căutărilor sale; formulăm această apreciere cel puţin ca o ipoteză.

Caillois dispune jocurile în ordinea descrescătoare a elementului „paidia“ şi în ordinea crescătoare a elementului „ludus“. În cadrul jocurilor de competiţie, fotbalul este plasat de Caillois cam pe locul al

şaselea, după alergări şi lupte, atletism, box şi scrimă. Este curios faptul că acelaşi autor eludează dimensiunea de vertij a fotbalului, aşezând aici doar scrânciobul, balansoarul, călăria, schiul şi alpinismul.

Cele mai importante întrebări sunt, din nefericire, şi cele mai grele. Care este logica internă a jocului de fotbal? Care este relaţia acestui joc cu lumea? De ce regulile jocului de fotbal sunt cele pe care le cunoaştem şi nu altele (aici putem învăţa multe, urmărind evoluţia jocului de fotbal de-a lungul timpului)? De ce terenul de fotbal, porţile, mingea au forma şi dimensiunile pe care le cunoaştem şi nu altele? De ce 11 jucători? etc. Întrebări similare pentru jocul de şah şi-au primit numai parţial răspunsul. Discutăm această chestiune în capitolul dedicat şahului. Fotbalul prezintă o situaţie mai dificilă, datorită acţiunii puternice a elementului de hazard. În orice caz, să constatăm modul remarcabil în care fotbalul respectă regula clasică a unităţii de timp, de loc şi de acţiune.

Orice răspuns la întrebările formulate va trebui să se refere la parametrii biologici şi psihologici ai fiinţei umane, atât în ipostaza de jucător cât şi în cea de spectator, iar cunoaşterea acestor parametri a progresat esenţial în ultimele decenii, datorită, în bună măsură, noilor ştiinţe ale informaţiei; va trebui să se refere la gradul optim de imprevizibilitate al unui joc care trebuie să evite atât haosul (imprevizibilitatea exagerată) cât şi determinismul pur (imprevizibilitatea prea redusă), iar în această privinţă din nou trebuie să fie convocate ştiinţele moderne ale informaţiei; va trebui să se refere la nevoia fiinţei umane de spectacol, rezultând atât din caracterul conflictual al jocului cât şi din natura sa agreabilă, mergând până la o plăcută ameţeală; va trebui să se refere la nevoia de libertate şi de împletire echilibrată a forţei fizice cu dibăcia minţii, a strategiei şi tacticii prestabilite cu improvizaţia care dă frâu liber imaginaţiei şi fanteziei personale (sociometria lui Moreno este aici direct vizată). Toate aceste cerinţe se armonizează până la un punct, dincolo de care natura lor conflictuală nu poate fi eludată. Fotbalul-industrie şi fotbalul-câştig de bani vor fi mereu în tensiune cu plăcerea jocului, caracterul său competiţional va stimula, dar va şi sabota caracterul său ludic. Este firesc să fie aşa, deoarece fotbalul

reproduce metaforic şi metonimic societatea actuală, care şi ea are o natură conflictuală, pe care numai parţial o deslușim deocamdată, din cauză că multe dintre conflicte sunt foarte ascunse şi se lasă greu descoperite.

Violenţă şi strategie

Pentru a înţelege întregul potenţial cognitiv (metaforic sau modelator) al fotbalului, trebuie să ţinem seamă de variatele sale ipostaze: energetică, sistemică, informaţională, strategică şi scenică. Se ştie că şahul a funcţionat (şi funcţionează) ca model cognitiv pentru ştiinţele economice şi ca metaforă cognitivă pentru limbaj, aşa cum este el conceput în lingvistica structurală a lui Ferdinand de Saussure. Însă şahul este un joc aproape exclusiv de gândire, în timp ce fotbalul are o structură mult mai eterogenă; de aceea, funcţia sa de model cognitiv şi de metaforă cognitivă se lasă mai greu investigată. Să încercăm să schiţăm câteva idei care ar putea fi valorificate în înţelegerea fotbalului ca generator de conflict.

Un specialist în proxemică (ştiinţa proprietăţilor culturale ale spaţiului), Edward Hall, observă (în celebra sa carte *The Hidden Dimension*) că distanţa de interacţiune a două persoane descreşte pe măsură ce raporturile lor afective devin mai intense. Pierre Parlebas (*Eléments de sociologie du sport*, Presses Universitaires de France, Paris, 1986, p.27) constată că în sporturile colective de tipul fotbalului cu cât distanţele între jucători se micşorează cu atât riscul unor acţiuni violente creşte. Vom adăuga că această stare de lucruri se extinde de pe teren în tribune; cu cât distanţa dintre suporterii celor două echipe este mai mică, cu atât riscul unor confruntări violente între ei creşte.

Leibniz, într-o scrisoare din 1704 către Jacques Bernoulli, propune o clasificare a jocurilor în trei categorii, în funcţie de modul în care se combină abilitatea şi hazardul: jocuri de raţiune (ca şahul), jocul de hazard (ca aruncarea zarurilor) şi jocuri de semi- hazard; pe acestea din urmă le ilustra cu un tip special de joc de cărţi, însă este evident că

fotbalul intră şi el aici (exista pe vremea lui Leibniz?), fiind o combinaţie de abilitate şi hazard. De la Leibniz vom sări tocmai în anul 1944, când John von Neumann (matematician) şi Oscar Morgenstern (economist) publică *Game Theory and Economic Behavior*. Cu această carte, al cărei titlu exprimă un imens potenţial metaforic, ia naştere ştiinţa jocurilor de strategie, atât de importantă pentru înţelegerea conflictelor sociale contemporane; mai mult, înţelegerea psihicului uman a beneficiat esenţial de această ştiinţă, după cum rezultă din cercetările lui P.Lévine (*Introduction à un modèle mathématique de l'inconscient*, în „Mathématiques et Sciences Humaines", 71 (1980), p.77-98).

Orfani de arbitru, de terapeut, ne refugiem în fotbal

Intră fotbalul în ordinea de idei a jocurilor de strategie? Răspunsul este numai parţial afirmativ, situaţia fiind mai complicată. În 1960, Anatol Rapoport, un specialist în aplicarea teoriei jocurilor în ştiinţele sociale, publică o carte în care distinge trei tipuri de conflicte umane: lupte, jocuri şi dezbateri. Acestea au fost adoptate şi de teoria relaţiilor internaţionale. Într-o luptă, autocontrolul şi controlul mutual al actorilor descreşte rapid. Într-un joc, predomină strategia şi controlul raţional pe care actorii îl menţin asupra mişcărilor pe care le efectuează, chiar dacă nu şi asupra rezultatelor acestor mişcări. Dezbaterea pune accentul pe schimbul de motive, valori şi imagini cognitive ale realităţii. A devenit un loc comun să se considere că jocul este preferabil luptei, iar dezbaterea este preferabilă jocului. Cum se regăsesc aceste distincţii în fotbal? Răspunsul trebuie raportat la observaţiile lui Hall, Parlebas şi Rapoport, menţionate mai sus. Atâta vreme cât un jucător se află la o distanţă suficient de mare de jucătorii echipei adverse, acţiunea sa este determinată de factori strategici şi tactici asociaţi cu aptitudini fizice (de exemplu, o viteză cât mai mare de deplasare). De îndată ce distanţa faţă de adversar se micşorează, apare alternativa: a accepta lupta directă (driblarea adversarului) sau a pasa mingea unui

coechipier. În aceste condiţii, riscul pierderii autocontrolului şi al controlului mutual al jucătorilor angajaţi în luptă creşte foarte mult. Intervenţia arbitrilor devine decisivă şi apar cartonaşele galbene sau chiar roşii, care şi ele au proliferat metaforic în toate domeniile de activitate şi mai ales în presă şi în viaţa politică. Dezbaterea la care se referă Rapoport constă aici în eventuala consultare a arbitrilor de margine de către arbitrul principal şi la luarea unei decizii; dar abia după meci mass media şi „microbiştii" supun jocul şi arbitrajul unui examen necruţător.

Regăsim deci în fotbal toate componentele teoriei conflictelor. Principala deosebire faţă de conflictele internaţionale se referă la criza de arbitraj pe care o resimt de multe ori acestea din urmă, dar care este de neconceput în fotbal (actele de contestare a deciziilor arbitrului sunt sancţionate fără ezitare) în timpul desfăşurării meciului. Cu alte cuvinte, în fotbal, ca în orice sport, se menţine o distincţie netă între jocul propriu-zis, pe de o parte, şi observarea şi diagnosticarea acestuia, pe de altă parte (tot aşa cum convenţia artistică menţine o separaţie casantă între planul ficţiunii artistice şi planul realităţii). În viaţa internaţională (şi, de multe ori, şi în viaţa unor grupuri sociale mai restrânse), dimpotrivă, această funcţie terapeutică este de multe ori în criză şi am putut constata (alături de unele succese) eşecul repetat al unor organizaţii internaţionale de tipul O.N.U. în încercarea de a pune capăt unor conflicte foarte grave. În psihoterapie, însănătoşirea bolnavului este obţinută prin colaborarea acestuia cu medicul; acesta din urmă se menţine în afara universului patologic al bolnavului, dar, într-o anumită măsură, se insinuează în acest univers, pentru a-l ajuta pe bolnav să transgreseze frontiera bolii. În multe conflicte ale lumii contemporane, cel care trebuie să asigure această funcţie terapeutică nu poate fi găsit şi atunci bolnavul care suntem trebuie să devină propriul său terapeut; autoreferinţa, autoorganizarea rămân singura soluţie. Trăim o criză de încredere, instituţiile care ar trebui să arbitreze situaţiile delicate nu mai sunt întotdeauna în stare s-o facă. Orfani de arbitru, de terapeut, ne refugiem în teritorii aparent mai sigure; fotbalul este unul dintre acestea.

Paradoxul clasamentelor

Fotbalul a dat naştere unei bogate literaturi ştiinţifice. Un aspect important se referă la diferite clasificări posibile ale performanţelor unor echipe implicate într-o activitate competiţională (evident, problema se pune nu numai în fotbal). Vom cita în această privinţă articolele lui M.E.Glickman şi H.S.Stern, *A state-space model for National Football League scores*, J.Amer. Statist. Assoc. 93, 441 (1998), 25-35; B.Kopocinski, *Components of the game result in a football league*, Appl. Math. 28, 1 (2002), 1-18; B. Kopocinski *Unfinished league season of football*, „ Demonstratio Mathematica 34, 2, (2001), 461-468 (în acest din urmă articol, se studiază posibilele evoluţii ulterioare ale campionatului de fotbal al Poloniei din 1939, campionat întrerupt ca urmare a situaţiei critice create atunci sub aspect politic şi militar).

Clasamentele în sport (ca şi în alte domenii) ridică probleme delicate, de natură logică şi combinatorială. Am atras atenţia asupra lor în cartea *Paradoxul*, Editura Abatros, Bucureşti, 1984 (în special p.39-45). O carte instructivă în acest sens este: Gheorghe Păun, *Paradoxurile clasamentelor* (Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1987); la paginile 62-67 ale acestei cărţi, autorul discută o problemă de agregare a mai multor clasamente, provenite de la diferite categorii de public. Despre ce este vorba? Revista „Flacăra“, nr.5 (1286) din 31 ianuarie 1980 a organizat o anchetă cu tema „Care este cel mai bun fotbalist al anului 1979?“. Întrebarea a fost adresată în mod diferenţiat cititorilor, tehnicienilor (arbitri, antrenori, reprezentanţi ai federaţiilor de profil) şi cronicarilor sportivi. Fiecare cititor, tehnician şi cronicar anchetat a propus un nume de fotbalist. S-au obţinut astfel trei ierarhii, după cum urmează. Cititorii: 1. Dobrin, 2. Ştefănescu, 3. Răducanu, 4. Sameş, 5. Dinu. Tehnicienii: 1. Sameş, 2. Răducanu, 3. Dobrin, 4. Ştefănescu, 5. Dinu. Cronicarii: 1. Dobrin, 2. Răducanu, 3. Sameş, 4. Dinu, 5. Ştefănescu. Cum agregăm aceste ierarhii într-o ierarhie de sinteză? Problema generală a agregării unor clasamente într-un clasament

unic, de sinteză, comportă dificultăţi şi a primit soluţii dintre cele mai variate, despre care cartea menţionată a lui Gh. Păun dă o informaţie bogată, mai cu seamă că autorul are în această privinţă şi contribuţii importante. Însă primul rezultat care trebuie menţionat în această privinţă este unul mai degrabă negativ; nu vom da aici formularea sa exactă, dar vom reţine următorul aspect: nici o agregare a unor clasamente parţiale într-unul total nu satisface toate cerinţele intuitive ale unei operaţii de acest fel. Limitându-ne la ancheta menţionată mai sus, vom observa că o metodă frecvent folosită este aceea a lui Borda, care, într-o variantă puţin modificată, constă în a se face, pentu fiecare jucător, suma rangurilor poziţiilor pe care acesta le ocupă în respectivele ierarhii, ordonându-se apoi jucătorii în ordinea crescândă a rezultatelor astfel obţinute. Obţinem: Dobrin 1+3+1=5, Răducanu 3+2+2=7, Sameş 4+1+3=8, Ştefănescu 2+4+5=11, Dinu 5+5+4=14. Acesta este clasamentul total al jucătorilor, deci cel mai bun jucător al anului fotbalistic 1979 a fost decretat Dobrin.

CAPITOLUL III
JOCURI PARADOXALE

Paradoxul ca joc

Paradoxul are în ţesătura sa o componentă ludică. În forma lor cea mai generală, „paradoxurile apar ca rezultat al faptului că două niveluri distincte ale cunoaşterii, ale limbajului, ale realităţii, ale comportamentului etc. sunt văzute ca unul singur, se suprapun sau pur şi simplu se confundă". Am citat din cartea noastră *Paradoxul* (Editura Albatros, Bucureşti, 1984, p. 167). Nivelurile pe care le avem în vedere pot fi de natură sintactică, semantică sau pragmatică (aceste trei dimensiuni semiotice sunt importante şi în alte privinţe, de exemplu în discutarea ideii de demonstraţie sau a aceleia de greşeală).

Ne-am obişnuit să asociem jocul cu regulile care-l caracterizează; de aici şi importanţa sintagmei „regula jocului" (a se vedea, de exemplu, cartea cu acest titlu a lui Paul Cornea, la Editura Eminescu, Bucureşti, 1980). Jocul constituie intrarea într-un univers altul decât cel obişnuit, un univers care se defineşte prin reguli caracteristice, de cele mai multe ori explicit formulate. Paradoxul este şi el o invitaţie la un joc, dar momentul său inaugural îl constituie nu intrarea, ci ieşirea dintr-o regulă constând în acceptarea distincţiei dintre două anumite niveluri ale cunoaşterii, limbajului, realităţii sau comportamentului. O atare distincţie este atât de naturală, încât ea poate să treacă neobservată; o observăm abia când nu mai funcţionează, aşa cum ne dăm seama de importanţa respiraţiei abia atunci când ea este împiedicată. Putem deci spune că paradoxul constituie un joc a cărui regulă de bază este abolirea distincţiei dintre două niveluri de tipul menţionat. Unificarea a două niveluri deobicei separate înseamnă că o anumită ordine este tulburată, ne aflăm în prezenţa unui **puzzle** care poate produce surprize în serie. Să ne gândim la spectacolul produs de identifi-

carea metalimbajului cu limbajul obiect (ca în faimosul paradox al mincinosului), a discretului şi continuului (ca în principiul lui Bohr al complementarităţii, din mecanica cuantică, unde electronul este în acelaşi timp undă şi particulă). Să ne amintim de confuzia dintre sens (*Sinn*) şi referent (*Bedeutung*) în paradoxul Electra (*Paradoxul*, p.68-71), dintre sensul propriu şi cel figurat (ca în unele situaţii din *Cântăreaţa cheală* de Eugène Ionesco, din *Proştii sub clar de lună*, de T. Mazilu, din *În căutarea sensului pierdut*, de I. Băieşu, şi din *Există nervi*, de M. Sorescu). Suprapunerea adevărului şi falsului este caracteristică multor paradoxuri semantice care transgresează principiul necontradicţiei. Alte paradoxuri au la bază confuzia dintre abrupt şi gradual, dintre finit şi infinit, dintre solemn şi prozaic, dintre plauzibil şi absurd, dintre surpriză şi previzibilitate, dintre terapeut şi pacient etc. Ludicul este prezent în inima paradoxului.

În capitolul final (XI), există o secţiune (*Paradoxul ca antinomie*), unde se studiază problema inversă: Jocul ca paradox

Jocul păsărilor

Pe o şosea necirculată, doi automobilişti îşi conduc automobilele cu mare viteză unul către celălalt, pe banda centrală a şoselei. Coliziunea devine inevitabilă... dacă măcar unul dintre automobilişti nu-şi deviază vehiculul pe o bandă alăturată. Primul care o va face este decretat învins într-un joc numit „al păsărilor", probabil datorită obiceiului unor păsări de a se feri abia în ultimul moment din calea vehiculelor care se deplasează cu mare viteză pe şosele. Celălalt, mai nesăbuit, este decretat câştigătorul, „eroul" jocului.

Jocul păsărilor este tipic pentru situaţiile de ameninţare reciprocă pe care le întâlnim nu numai la câini şi la pisici, dar din păcate şi la oameni şi chiar la unele grupuri sociale. Mai grav este faptul că astfel de situaţii apar şi între unele state, care se ameninţă reciproc, sugerând fiecare celuilalt posibilitatea de a utiliza împotriva sa arme dintre cele mai teribile.

O examinare mai atentă a jocului păsărilor dezvăluie structura sa strategică. Fiecare dintre cei doi jucători dispune de două strategii, între care are de ales: sau să-şi devieze vehiculul pe banda alăturată, sau să-şi continue drumul drept înainte, în direcţia vehiculului care vine spre el. Prima strategie este mai înţeleaptă, deoarece protejează nu numai viaţa jucătorului în cauză, ci şi pe aceea a celuilalt jucător; ea reflectă deci o atitudine cooperativă, venind în întâmpinarea dorinţei ambilor jucători de a-şi salva viaţa. Dar această atitudine cooperativă comportă riscul pierderii jocului. Cealaltă strategie, care constă în a merge la câştig cu orice preţ, chiar cu riscul pierderii vieţii, reflectă evident o atitudine necooperativă, deoarece nesocoteşte vieţile ambilor jucători.

Este oare necesar ca alegerea uneia dintre cele două strategii să se producă încă înainte de începerea jocului, sau decizia poate fi lăsată pentru un moment ulterior începerii jocului? Aici intră în discuţie diferiţi parametri, cum ar fi lungimea parcursului de desfăşurare a cursei, viteza automobilului şi prezenţa de spirit a jucătorului. De fapt, viteza mare este prevăzută chiar în regulamentul jocului, nici unul dintre jucători nu are răgazul de a observa intenţia celuilalt jucător, deci este recomandabil, dacă nu chiar necesar, ca alegerea strategiei să preceadă începerea jocului. Dacă, însă, fiecare jucător este liber să aleagă o strategie sau alta, el nu poate prevedea rezultatul alegerii sale, deoarece acest rezultat depinde şi de alegerea pe care o face celălalt jucător. Apar patru posibilităţi: 1) jucătorii cooperează, stabilind în prealabil să-şi devieze vehiculele în acelaşi moment; 2) ambii jucători adoptă o strategie necooperativă, care are ca rezultat coliziunea; 3) primul jucător adoptă o atitudine cooperativă, hotărând să-şi devieze vehiculul, dar cel de al doilea nu o face şi este declarat câştigător; 4) o situaţie similară celei precedente, însă cu schimbarea rolurilor.

Este uşor de văzut – şi acest fapt este confirmat de teoria matematică a jocurilor, iniţiată de J. Von Neumann şi O. Morgenstern (*Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press, 1944) – că, dintre cele patru rezultate posibile, cel mai avantajos este primul, deci cea mai bună strategie este, pentru ambii jucători, cea cooperativă.

Într-adevăr, în acest caz pierderile sunt minime pentru ambii jucători, nici unul dintre ei necâştigând pe seama celuilalt, ca în situaţiile 3 şi 4, sau distrugându-se reciproc, ca în situaţia 2.

Se impune acum o observaţie. Dacă cea mai raţională strategie se soldează totuşi cu pierderi de ambele părţi, atunci şi mai raţional ar fi fost ca jocul să nici nu înceapă. Dacă totuşi jocul a început şi nu mai poate fi evitat, se constată că fiecare dintre cele patru rezultate posibile creează o solidaritate între jucători, în sensul că situaţia fiecăruia dintre ei devine posibilă datorită unui sprijin (în cazurile 3 şi 4), unei complicităţi (în cazul 2) sau înţelegeri (în cazul 1) din partea celuilalt. Într-adevăr, în cazul 2 este vorba de o complicitate în nesăbuinţă, iar în cazurile 3 şi 4 unul dintre jucători câştigă, dar el se poate bucura de acest câştig datorită faptului că viaţa sa a fost protejată de către jucătorul care pierde. Fiecare depinde de celălalt. Supravieţuirea unuia nu mai este posibilă fără supravieţuirea celuilalt. Trecând la aspectul psihologic şi moral, constatăm că, exceptând cazul 2, cel care pierde se află în câştig moral, pentru că a salvat două vieţi, iar cel care câştigă pierde, datorită conştiinţei sale vinovate. Suntem deci în prezenţa unei antinomii între câştig şi pierdere.

În descrierea clasică a jocului păsărilor se vorbeşte şi despre un public care aplaudă pe câştigător. Între timp însă, automobilele au devenit mai multe şi mai încăpătoare. Spectatorii au luat loc în ele. Nu mai are cine aplauda. Suntem prinşi cu toţii într-un joc al cărui deznodământ depinde de noi toţi.

Preţul suspiciunii

Legenda spune că stăpânul unei închisori în care se aflau doi deţinuţi – izolaţi fiecare în câte o celulă – a chemat la el pe unul dintre deţinuţi, oferindu-i libertatea şi o sumă importantă de bani dacă-şi va mărturisi vinovăţia cu cel puţin o zi înaintea celuilalt deţinut, urmând ca acesta din urmă să fie spânzurat. „Ce se întâmplă dacă amândoi ne mărturisim vinovăţia în aceeaşi zi?“, întreabă deţinutul pe stăpânul închisorii.

„Veţi rămâne amândoi în viaţă, dar veţi sta zece ani la închisoare", răspunde stăpânul închisorii. „Dar dacă nici unul dintre noi nu va depune mărturia cerută?" „Atunci veţi fi amândoi puşi în libertate, dar nu veţ primi nici o recompensă bănească. Dar ce siguranţă ai că celălalt nu se va grăbi să mărturisească şi să-şi ia mai repede banii? Acum du-te în celula ta şi gândeşte-te până mâine asupra răspunsului". O discuţie similară a avut loc între stăpânul închisorii şi celălalt deţinut.

În ce constă dilema în faţa căreia se află fiecare dintre cei doi deţinuţi? Ea constă în a alege între două strategii, fiecare cu riscurile şi cu speranţele ei: să taci, abţinându-te de la orice mărturie, sau să accepţi să depui mărturie de vinovăţie. Cele patru rezultate posibile, obţinute prin combinarea fiecărei strategii a unuia dintre deţinuţi cu fiecare strategie a celuilalt sunt următoarele: (1) ambii deţinuţi tac, obţinând astfel libertatea, dar neprimind nici o sumă de bani; (2) unul tace, dar celălalt depune mărturie, obţinând astfel atât libertatea cât şi recompensa bănească, în timp ce colegul său este trimis la spânzurătoare; (3) situaţia precedentă, cu inversarea rolurilor; (4) cei doi deţinuţi dau dovadă de spirit practic şi depun mărturie în aceeaşi zi (ziua imediat următoare discuţiei cu stăpânul închisorii), salvându-şi astfel viaţa, dar rămânând în închisoare zece ani.

Este important, pentru înţelegerea dilemei pe care o trăiesc cei doi deţinuţi, faptul că ei nu pot comunica, pentru a-şi coordona deciziile. Acest fapt îşi pune amprenta pe întreaga lor comportare. Dar mai este un factor care intervine decisiv; încrederea reciprocă. Dacă ei ar putea comunica şi ar avea încredere unul în celălalt, este foarte probabil că ar conveni să tacă amândoi, salvându-şi astfel nu numai viaţa, ci şi libertatea (rezultatul 1).

Însă deţinuţii nu pot comunica. Dacă ei totuşi manifestă înţelepciune şi dacă fiecare dintre ei are încredere în bunele intenţii şi înţelegerea celuilalt, atunci este foarte probabil că vor alege calea tăcerii. Dacă însă ei sunt stăpâniţi de raţiune, dacă fiecare dintre ei are încredere în înţelepciunea celuilalt, dar nu şi în sinceritatea sa, atunci este foarte probabil că se vor grăbi amândoi să-şi mărturisească vinovăţia în prima zi.

Faţă de cele discutate mai sus, pot interveni unele complicaţii. Mai întâi, se pune problema măsurii în care fiecare dintre cei doi deţinuţi îşi construieşte o imagine corectă a atitudinii celuilalt şi a modului în care propria sa atitudine este imaginată de către celălalt. Apoi, sunt posibile asimetrii, atât în ceea ce priveşte atitudinile şi strategiile adoptate (este posibil ca numai unul dintre ei să aibă încredere în celălalt) cât şi în ceea ce priveşte modul în care fiecare dintre ei îşi reprezintă atitudinea celuilalt.

Interesul acestei celebre „dileme a deţinuţilor" (the prisoner's dilemma) stă în capacitatea ei de a modela situaţii importante existente atât în relaţiile personale cât şi în cele dintre state. Dar această modelare are loc nu la nivelul datelor concrete ale dilemei, ci la al semnificaţiilor pe care ea le degajă. Teoria clasică a jocurilor recomandă drept cea mai raţională strategie pe aceea a mărturiei imediate de vinovăţie, singura care duce în mod sigur la propria supravieţuire. Aceasta nu este însă o strategie cooperativă, ea putând duce la sacrificarea celuilalt deţinut. Raţionalitatea strategiei este condiţionată de caracterul ei egoist, de suspiciune. Dar aceasta este drama oricărei strategii adoptate în condiţii de neîncredere reciprocă. Controlul şi limitarea armelor sunt tipice pentru această raţionalitate în condiţii de neîncredere. Spre deosebire de jocul păsărilor, unde strategia cea mai raţională era cea mai cooperativă, în cel de faţă garanţia de supravieţuire vine în conflict cu spiritul cooperativ. Ia naştere o antinomie având ca termeni raţionalitatea şi spiritul necooperativ. Acesta este preţul suspiciunii. Limitarea armamentelor şi apoi dezarmarea, în condiţii de încredere reciprocă, ar fi deosebit de profitabile pentru toate părţile, deoarece ar conduce la o reducere considerabilă a cheltuielilor militare. În condiţii de suspiciune însă, posibilitatea ca una dintre părţi să încerce să le păcălească pe celelalte nu poate fi subapreciată; ea ar putea conduce la un rezultat de tipul 2 sau 3 în dilema deţinuţilor.

Iată de ce orice iniţiativă de reducere a cheltuielilor militare constituie un act de curaj şi înţelepciune.

Testul surpriză

După cum se ştie, pe parcursul unui semestru studenţii sunt supuşi la unele teste, de natură a-i stimula să se pregătească ritmic şi pentru a le da posibilitatea să-şi verifice cunoştinţele. Cadrele didactice îi pot astfel urmări şi aprecia de-a lungul unei perioade mai mari, înlăturându-se greşelile care pot rezulta dintr-o apreciere făcută exclusiv pe baza unui examen final. Însă, dincolo de avantaje, aceste teste sunt pândite de unele primejdii. Obsedaţi de testul care se apropie, unii studenţi neglijează pregătirea la celelalte discipline, producându-se astfel o tulburare a procesului de învăţământ.

Aşa a apărut dilema test surpriză – test anunţat. Fiecare dintre aceste două tipuri de test prezintă avantaje şi dezavantaje. Ele ne evocă o dificultate pusă în evidenţă în urmă cu peste 40 de ani şi care a dat naştere la speculaţii dintre cele mai bizare (o sinteză a acestor discuţii se găseşte la G.C. Nerlich, *Unexpected examinations and unprovable statements*, în revista „Mind" no. 70, 1961, p. 503 – 513). Iată despre ce este vorba.

Un profesor îşi anunţă studenţii că vor fi supuşi, în primul semestru, la un test surpriză (de fapt, în momentul anunţului data testului era deja fixată, într-o anume zi din luna noiembrie). Un student însă îl interpelează imediat pe profesor, atrăgându-i atenţia că, în afară de cazul în care profesorul are de gând să încalce termenii propriului său anunţ, testul în discuţie nu este posibil. Într-adevăr, observă studentul, să presupunem că asimilăm semestrul cu zilele unei săptămâni (aceasta, numai pentru a evita folosirea unei notaţii speciale). Dacă testul nu a fost dat până vineri seara, va fi clar că a doua zi, sâmbătă, testul devine inevitabil... deci nu mai este un test surpriză. Aşadar, testul nu poate fi dat mai târziu de vineri. Însă atunci, dacă testul nu este dat până joi, inclusiv, joi seara apare evident că testul a devenit inevitabil pentru a doua zi, vineri... fiind astfel din nou încălcată condiţia de test surpriză. Rezultă că, pentru a nu încălca această condiţie, testul trebuie dat nu mai târziu de joi. Însă, printr-un raţionament analog, relativ la seara de

miercuri, apoi la cea de marți și, apoi, la cea de luni, constatăm că nici joi, nici miercuri, nici marți, nici luni nu este posibil un test surpriză. Ceilalți studenți s-au asociat imediat la argumentul colegului lor. Însă replica profesorului veni prompt. „Și dacă totuși testul va fi dat joi?"

Ceea ce atrage atenția de la început este faptul că studenții sunt anunțați că vor fi supuși unui test surpriză. Anunțarea atenuează surpriza. De fapt, un test complet neanunțat nici nu poate exista, deoarece măcar cu câteva minute înainte ca el să înceapă trebuie să fie anunțat. Cât de mult se poate dilata acest interval dintre momentul anunțării și momentul începerii efective a testului, pentru ca acesta din urmă să fie considerat o surpriză? De obicei, prin test anunțat se înțelege un test a cărui dată calendaristică este stabilită, dacă nu de la începutul semestrului, cel puțin cu câteva săptămâni înainte ca el să aibă loc. În aceste condiții, un test despre care se află abia în ajunul zilei în care el va fi dat își păstrează, în mare măsură, caracterul de test venit pe neașteptate. Însă această dificultate poate fi depășită dacă, în dialogul profesorului cu studenții săi, expresia *test surpriză* este înlocuită cu *test despre care se află abia în ziua în care el va fi dat*. În acest fel, argumentul studentului nu numai că rămâne valabil, dar câștigă în rigoare. Fiecare zi se dovedește improprie pentru testul în discuție.

Și totuși, profesorul are dreptate. Mai mult decât atât, testul la care-i va supune pe studenți într-o anumită zi din luna noiembrie va fi un test cu totul neașteptat. Acest test nu va putea fi prevăzuit nici cu o zi, nici cu treizeci de zile înainte ca el să aibă loc. Într-adevăr, raționamentul pe care studenții îl propun profesorului arată că ei sunt convinși că toate sunt egal de improprii pentru un test surpriză. În aceste condiții, ei nu se mai așteaptă, în nici una din zile, să fie supuși unui atare test. Se creează astfel o nedeterminare de ordinul al doilea, pe care profesorul nu ezită să o folosească. În orice zi va fi dat, testul va veni împotriva așteptărilor studenților, deci va avea toate atributele psihologice ale surprizei. Surpriza intră aici în relație antinomică cu negația ei. Nu face excepție de la această situație nici măcar ultima zi a semestrului.

La unii autori (vezi de exemplu, Martin Gardner, *A new paradox and variations on it, about a man condemned to be hanged*, în *Scientific American*, no. 208, 1963, p. 144 – 154) apar alte versiuni ale problemei de mai sus. De fapt, cu situaţii de tipul discutat ne întâlnim mai frecvent decât ar putea să pară la prima vedere.

Jocul fără sfârşit

Două persoane se angajează într-un joc lingvistic constând în înlocuirea fiecărei afirmaţii prin negaţia ei. Aceasta înseamnă că atunci când unul spune „da" celălalt înţelege „nu" şi invers; când primul spune „Sunt de acord" celălalt înţelege „Nu sunt de acord", iar când acesta din urmă îi răspunde „Te iubesc" primul înţelege „Te urăsc". Este deci vorba de un joc al răsturnărilor de sensuri.

La copiii care articulează primele silabe, funcţia ludică a limbajului se dezvoltă în mod spontan. Pe măsură ce copilul creşte, el se orientează spre jocurile lingvistice bazate pe anumite convenţii. Jocul spontan este practicat de copil de obicei de unul singur, în timp ce jocul convenţional presupune în general un partener (nu neapărat uman). Practicarea – conştient sau nu – a jocului lingvistic se află în strânsă legătură cu funcţia de disimulare a limbajului, în cadrul căreia sunt puse în mişcare diferite coduri confidenţiale şi sunt manipulate sursele de nedeterminare ale limbajului (ambiguitate, probabilitate, generalitate, imprecizie, deschidere, variabilitate, incoerenţă, lipsă de coeziune, antinomie, caracter inefabil, ignoranţă, mister etc.), surse care, la rândul lor, ne pot manipula şi ele pe noi.

Să revenim la jocul răsturnărilor de sensuri. Să presupunem că, la un moment dat, unul dintre jucători spune: „Să oprim jocul!" Ezitarea în faţa căreia se va afla celălalt jucător este evidentă: dacă mesajul este intrepretat după regula jocului, el este decodat prin „Să continuăm jocul"; dacă însă mesajul este considerat în afara jocului, deci cu referire la joc din afara acestuia, atunci el va trebui interpretat *ad litteram*. S-ar putea crede că o ieşire din această dificultate se obţine

prin lansarea, de către unul dintre jucători, a mesajului „Să continuăm jocul", pe care celălalt jucător îl va interpreta prin „Să oprim jocul", deci jocul va lua sfârşit. Însă şi în acest caz apare o dilemă de aceeaşi natură ca dilema din cazul precedent, deoarece jucătorii nu dispun de un criteriu pe baza căruia să decidă dacă mesajul în cauză face parte din joc sau este un metamesaj, deci un mesaj despre joc, emis din afara jocului.

Cum se poate ieşi din această dilemă? Prin regulile sale interne, jocul nu ne oferă nici o şansă în această privinţă. Este nevoie de o convenţie asupra jocului, deci de o convenţie asupra altei convenţii. Astfel, jucătorii pot conveni, înainte de începerea jocului, ca în cadrul jocului să folosească un anumit cod (de exemplu, limba română), iar pentru comunicări asupra jocului un alt cod (de exemplu, o limbă străină). Mai există şi posibilitatea de a fixa o anumită durată de joc, după care de la sine se revine la comunicarea normală. Dacă astfel de soluţii sunt plauzibile pentru jocul atât de rudimentar pe care-l avem în vedere aici, pentru alte jocuri, mai complicate, dar care în viaţa socială intervin sub forma unor probleme de strategie (atât în microcolective, ca familia sau şcoala, cât şi în relaţiile dintre grupurile sociale mai mari, cum ar fi partidele politice sau statele naţionale), soluţiile propuse mai sus devin naive, insuficiente sau inoperante. Nici o limbă naturală nu este rezervată exclusiv pentru nevoile metacomunicării; dimpotrivă, orice astfel de limbă îndeplineşte concomitent atât funcţia de comunicare cât şi pe aceea de metacomunicare. Apoi, celor mai multor confruntări care pun probleme de strategie nu li se poate fixa nici o limită în timp (a se vedea, de exemplu, tratativele pentru dezarmare).

Există însă şi o altă soluţie, foarte frecvent folosită: aceea a alegerii unui mediator, a unui arbitru. Soluţia este aplicată totdeauna la jocurile sportive. Ea este aplicată cu succes în psihiatrie, unde rolul de mediator este rezervat medicului psihoterapeut, care dă bolnavului posibilitatea de a transcende regula propriului său joc, deci de a ieşi din starea de psihoză în care se află implicat şi de a depăşi astfel o dificultate pe care altfel nu ar fi putut-o învinge.

În toate exemplele date, este vorba de un sistem definit prin anumite reguli şi de posibilitatea de a depăşi aceste reguli ori de câte ori este cazul. O soluţie, în această privinţă, este intervenţia unui factor din afara sistemului, un mediator care poate fi, după caz, o persoană (un părinte, un profesor, un medic, un frate, un prieten etc.), un grup social (familia, şcoala, o comunitate religioasă, colectivul întreprinderii în care lucrezi) sau o altă instituţie. Intervenţia acestui mediator pune de multe ori capăt unui joc altfel fără sfârşit.

Este aceasta o soluţie universală? Pot fi rezolvate pe această cale marile probleme ale omenirii? La aceste întrebări ne vom referi în paragraful următor.

Reguli şi metareguli

Să ne imaginăm o ţară a cărei constituţie garantează dreptul de a supune orice problemă unor dezbateri parlamentare nelimitate. Membrii parlamentului ajung repede la concluzia că, în pofida avantajelor pe care le prezintă, nelimitarea în timp a dezbaterilor este dăunătoare, deoarece face imposibilă luarea unei decizii. Se propune atunci un amendament cerând introducerea unei durate limită în dezbaterea oricărei probleme. Însă şi acest amendament cade sub incidenţa regulii care permite o discuţie nelimitată, motiv pentru care el nu poate fi adoptat. Iată un sistem care nu găseşte în el însuşi posibilitatea de a-şi depăşi dificultăţile. Mecanismul său de funcţionare conţine în sine propria sa ineficacitate.

Acest joc fără sfârşit, discutat (ca şi cel la care ne-am referit în paragraful precedent) de Paul Watzlawick, Janet Helmick Beavin şi Don D. Jackson (*Pragmatics of Human Communication, Faber and Faber*, Londra, 1968, p. 235) este semnificativ pentru multe situaţii care pot să apară în viaţa personală sau în cea socială.

Cum se poate sparge cercul vicios din exemplul de mai sus? Fie recurgându-se la un arbitru nesupus restricţiilor sistemului parlamentar (dar există totdeauna un atare arbitru? Este de dorit experienţa sa?), fie

printr-un act de violenţă, care nu se mulţumeşte cu un singur amendament, ci care răstoarnă constituţia existentă. Autorii menţionaţi analizează diferite situaţii din domeniul psihiatriei, în care ieşirea dintr-o anumită dificultate, de exemplu, într-o familie supusă unei situaţii conflictuale, se obţine prin intervenţia unui terapeut care, cu ajutorul unor metareguli, modifică regulile, existente în familia respectivă. Dar, chiar prin aceasta, sistemul iniţial, cel al familiei, s-a lărgit, înglobându-l şi pe terapeut. Treptat, terapeutul se implică tot mai mult în relaţiile sale cu pacienţii. S-ar părea că în acest fel forţa sa terapeutică se măreşte. Însă, după cum arată autorii menţionaţi mai sus, experienţa mai multor specialişti a condus la constatarea că, cel puţin în unele cazuri (de exemplu, cel al unei familii în care se află un schizofrenic), implicarea prea puternică a mediatorului diminuează capacitatea sa terapeutică. Acesta este, de obicei momentul în care terapeutul simte nevoia să se consulte cu un coleg al său de profesie, care-l ajută să se detaşeze de sistemul în care s-a implicat şi să-şi recapete funcţia de supraveghere şi modificare a regulilor prin metareguli.

Să examinăm acum modul în care actualul sistem mondial reuşeşte să depăşească, prin metareguli adecvate, regulile care nu se dovedesc viabile sau operaţionale. Dispunem de numeroase organizaţii internaţionale (într-un număr mai redus, ele au existat şi înainte de al doilea război mondial), dintre care cea mai importantă este Organizaţia Naţiunilor Unite; îndeplinesc ele rolul de mediator, de terapeut al atâtor situaţii bolnave existente azi în lume? Răspunsul este în acelaşi timp afirmativ şi negativ. Este afirmativ, pentru că aceste organizaţii constituie un mijloc esenţial de menţinere şi dezvoltare a dialogului internaţional şi de promovare a metodei tratativelor în rezolvarea litigiilor dintre state. Dar el este negativ, în sensul că acest rol de mediator nu este acela al unui outsider, al unui arbitru care se află în afara jocului, deci neimplicat în problemele pe care trebuie să le scoată din impas; într-adevăr, în raport cu problemele globale cu care este astăzi confruntată omenirea, este greu de acceptat că ar putea exista un outsider capabil să elaboreze metareguli pe baza cărora sistemul mondial actual

ar putea depăşi propriile sale reguli de funcţionare, pentru a trece la altele, mai rezonabile. Orice organizaţie internaţională este, prin forţa împrejurărilor, alcătuită nu din marţieni, ci din reprezentanţi ai unor grupuri sociale care trăiesc pe planeta noastră, deci aparţin chiar sistemului care se află în criză: această implicare în sistemul bolnav este transferată inevitabil şi reprezentanţilor diferitelor grupuri sociale. Un mediator terapeut *din afară* pur şi simplu nu există. Din acest motiv, nu putem pune în analogie problemele globale generate de boli ale structurii sociale a societăţii *cu problemele globale generate de boli ale structurii sociale a societăţii* cu problemele personale sau de microgrup generate de unele boli psihice (pentru acestea din urmă, posibilitatea mediatorului plasat în afara jocului este esenţială). Lumea contemporană trebuie să se resemneze cu situaţia ei autoreferenţială, ea trebuie să înveţe să fie propriul ei terapeut. Ieşirea din actualul sistem internaţional, din actuala „regulă de joc" nu poate fi realizată decât printr-o implicare cât mai profundă şi a tuturor în problemele sistemului.

Exemplul cu care am început paragraful de faţă şi care se vrea edificator în raport cu necesitatea depăşirii oricăror reguli prin metareguli adecvate ar putea să pară un simplu exerciţiu intelectual dacă, din păcate, n-ar modela numeroase situaţii reale din domeniul relaţiilor internaţionale. Iată, în acest sens, o situaţie evocată de Charles E.Osgood (*Reciprocal Initiative*, în James Roosvelt ed., „The Liberal Papers", Quadrangle Books, Chicago, 1962, p.172): „Unii conducători politici şi militari susţin public necesitatea înarmării până la nivelul care-ţi asigură primul loc în cursa înarmărilor. Continuăm astfel să vorbim despre pace, destindere şi securitate într-o lume împărţită din ce în ce mai mult în tabere care sunt gata să se distrugă unele pe altele. Din păcate, această politică de distrugere reciprocă nu comportă nici o clauză care să permită propria ei anihilare" (tot aşa cum constituţia ţării imaginare la care ne-am referit nu conţinea nici o clauză permiţând anihilarea posibilităţii de dezbatere nelimitată).

Au trecut peste 40 de ani de când Ch.E.Osgood a dat acest exemplu; din nefericire, el nu numai că nu s-a perimat, dar a devenit mai actual ca oricând, sub ameninţarea terorismului.

Dar nu cumva organizaţiile internaţionale pot fi un terapeut *din afară* în cazul conflictelor locale? Desigur, în acest caz, ele au o şansă mai bună, după cum s-a şi văzut într-un număr de cazuri. Poate că aceasta este unul din motivele pentru care un al treilea război mondial a fost evitat până acum, cu preţul a sute de războaie aşa-zise „mai mici". Dar toate investigaţiile confirmă faptul că războaiele mici manifestă o tendinţă tot mai puternică de a se transforma într-unul mare.

Principiul terţului acceptat

Dacă paradoxurile logice au apărut ca o contestare a principiului necontradicţiei, un alt principiu, al logicii clasice – principiul terţului exclus – s-a dovedit de asemenea vulnerabil, devenind, în secolul trecut, obiectul unor contestaţii deosebit de vehemente.

Faimosul principiu al terţului exclus („orice propoziţie este adevărată sau falsă: a treia posibilitate nu există") este afirmat pentru prima oară în secolul al şaselea înaintea erei noastre, prin *Parnmenide* (Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1969, p.11).

Tot din acea perioadă provin primele demonstraţii prin reducere la absurd; au rămas celebre în acest sens consideraţiile lui Zenon din Eleea (secolul al cincilea înaintea erei noastre), dar exemplul cel mai frapant este cel al demonstrării iraţionalităţii rădăcinii pătrate a lui doi, demonstraţie la care se referă frecvent Aristotel. Faptul că raţionamentele prin reducere la absurd au la bază principiu terţului exclus este accesibil astăzi oricărui elev de liceu.

Timp de peste două mii de ani, ştiinţa s-a supus acestei logici binare. Spre sfârşitul secolului trecut şi începutul secolului nostru apar însă, din direcţii foarte diferite, tendinţe de contestare a gândirii binare şi de înlocuire a ei cu o alta, mai fină. Nu vom parcurge evenimentele în ordinea lor cronologică, ci vom căuta să le organizăm într-un mod care le dezvăluie semnificaţiile cele mai importante.

Sunt 80 de ani de când logicianul polonez Jan Lukasiewicz publica un articol de numai două pagini, intitulat: *Asupra logicii cu trei valori*; cele trei valori erau adevărul, falsul şi posibilul (sau îndoielnicul). Ideea de a adăuga o a treia valoare la cele două cunoscute, adevărul şi falsul, ar putea fi interpretată ca un ecou îndepărtat la o observaţie a lui Aristotel privind statutul propoziţiilor care anunţă acţiuni viitoare. Unei propoziţii ca *Mâine va avea loc o bătălie navală* nu-i putem atribui valoarea de adevărat sau de fals fără a angaja într-un mod abuziv viitorul. Singura soluţie rezonabilă este de a-i atribui o a treia valoare, neutră. (*Logique et connaissance scientifique*, volume publié sous la direction de Jean Piaget, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard, Paris, 1967, p. 263). Lukasiewicz arăta ce formă iau, în această logică, principiile de identitate şi de implicaţie, definiţiile negaţiei, conjuncţiei şi disjuncţiei logice. Cuvintele cu care se încheia acest articol capătă azi o rezonanţă deosebită: „Autorul este de părere că logica cu trei valori are înainte de toate o importanţă teoretică, fiind un exemplu de logică nearistoteliană. Dacă o atare logică are cumva şi o importanţă practică, aceasta se va vedea abia atunci când fenomenele logice, în special cele din ştiinţele deductive, vor fi examinate cu atenţie şi atunci când consecinţele filozofiei nedeterministe, care este de fapt substratul metafizic al noii logici, vor putea fi comparate cu datele experienţei“ (Jan Lukasiewicz, *Selected Works*, editor L. Borkowski, North-Holland, Amsterdam-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1970, p.88).

În aproximativ treizeci de ani, avea să vină răspunsul: Logicile cu trei sau mai multe valori conduc la modele de o deosebită relevanţă în unele probleme tehnice privind diferite tipuri de mecanisme automate. O contribuţie esenţială în acest domeniu, în deceniile al şaselea şi al şaptelea ale secolului trecut, aparţine şcolii româneşti de teoria algebrică a mecanismelor automate, condusă de Gr.C. Moisil. Marele nostru matematician a făcut, pentru logicile lui Lukasiewicz (aceasta se întâmpla încă în deceniile al patrulea şi al cincilea), ceea ce Boole făcuse pentru logica clasică: a construit modelul lor algebric, con-

cretizat în ceea ce Moisil numea *algebre Lukasiewicz*. Derutantă denumire, preluată de mai toţi cercetătorii. Măcar acum, când celebritatea acestor algebre este asigurată, ele formând obiectul unei secţiuni speciale în revista internaţională de referate „Mathematical Reviews", este momentul să amintim că algebrele Lukasiewicz nu au fost introduse de către cel care le poartă numele, ci de către Gr.C.Moisil. Denumirea de *algebre Lukasiewicz – Moisil*, deja folosită în ultima vreme de unii cercetători, se impune să fie generalizată. (O discuţie amplă a logicilor cu trei valori, cu referire şi la contribuţiile româneşti este datorată lui Denise Becchio, *Logique trivalente de Lukasiewicz*, Annales Scientifiques de L'Université de Clermont II, no.66, Mathématiques, fascicule 16, 1978, p. 33 – 84).

Principiul terţului exclus (ca şi principiul dublei negaţii) a fost contestat şi respins şi de logica intuiţionistă dezvoltată de L.E.J. Brouwer şi A.Heyting, în prima jumătate a secolului trecut, dar pentru alte raţiuni decât cele care l-au ghidat pe Lukasiewicz. Acest principiu a fost considerat de intuiţionişti un mod neefectiv de raţionament, atunci când se referă la mulţimi infinite. În cadrul logicii intuiţioniste nu este admis infinitul actual, ci numai cel potenţial. De exemplu, nu se poate lucra cu mulţimea tuturor numerelor naturale, dar se pot considera numere naturale oricât de mari. De asemenea, nu sunt admise raţionamentele prin reducere la absurd, tocmai datorită faptului că acestea se sprijină pe principiul terţului exclus.

Intuiţionismul şi-a justificat contestaţiile sale prin nevoia de a conferi adevărurilor ştiinţifice un grad mai mare de efectivitate, deci de a reduce decalajul dintre existenţă şi construcţie. O atare orientare a pregătit ştiinţa pentru faza ei actuală, aflată, ca urmare a revoluţiei aduse de calculatoare, sub semnul celui mai înalt grad de efectivitate care a putut fi definit până azi: construcţia algoritmică.

Intuiţionismul (numit aşa, deoarece consideră că întreaga matematică se reduce la aritmetică, aceasta din urmă luându-şi noţiunile de bază din experienţa noastră intuitivă) evită paradoxurile teoriei mulţimilor, deoarece respinge infinitul actual şi acceptă (prin respin-

gerea principiului terţului exclus) posibilitatea ca o propoziţie să nu fie nici adevărată, nici falsă. De fapt, intuiţionismul acceptă principiul terţului exclus în cazul particular al mulţimilor finite. Exigenţa de efectivitate pe care o formulează Brouwer revine la interzicerea considerării unor elemente care nu pot fi efectiv indicate.

Constatăm deci dubla legitimare a contestării principiului terţului exclus: una privind necesitatea de a se trece la o gândire ştiinţifică mai nuanţată, cealaltă decurgând din cerinţa logică şi socială a unor raţionamente cât mai constructive.

Paradoxul Electra

Multă vreme, semantica a fost concepută într-un mod simplist, ca o cuplare a unor expresii lingvistice cu anumite fragmente ale realităţii. Cuvântul *câine* este asociat animalului „câine". Inevitabilă, o atare asociere şi-a arătat însă de la început insuficienţa. Un argument interesant în acest sens a fost furnizat de filozofia stoică şi este cunoscut sub numele de *paradoxul Electra*. Întors acasă, Oreste nu este recunoscut de sora sa, Electra, deşi ea ştie că Oreste este fratele ei. Cu alte cuvinte, Electra nu ştie că persoana care se află în faţa ei este Oreste, dar ştie că Oreste este fratele ei. Se poate spune că Electra ştie şi, în acelaşi timp nu ştie că persoana care se află în faţa ei este fratele ei: ştie, deoarece în faţa ei se află Oreste, despre care are cunoştinţă că este fratele ei; nu ştie, deoarece nu-şi dă seama că cel care se află în faţa ei este Oreste. Contradicţia provine din faptul că, pe de o parte, *Oreste* este considerat echivalent cu „fratele Electrei", iar, pe de altă parte, *Oreste* este considerat prin atributele sale fizice. Stoicii nu s-au mulţumit să constate această contradicţie şi să-i detecteze sursa, ci au indicat şi modalitatea de a depăşi dificultatea, prin introducerea unei a treia entităţi: sensul sau conceptul (stoicii foloseau termenul de *lecton*). Cu alte cuvinte, procesul de semnificare nu este bidimensional, deci alcătuit numai din expresii şi fragmente ale realităţii (în exemplul în discuţie, expresia este cuvântul *Oreste*, iar fragmentul de realitate este persoana fizică

având acest nume), ci tridimensional, a treia dimensiune fiind de natură conceptuală (în cazul de față, reprezentarea mintală a persoanei cu numele *Oreste*).

Filozofia limbajului, de la scolastica medievală până la Frege, Peirce, Russell, Carnap și Church, a elaborat și aprofundat îndelung aceste distincții. Unei expresii lingvistice i se asociază deci un sens (*Sinn* la Frege, *intension* la Carnap) și un referent (*Bedeutung* la Frege, *extension* la Carnap). Să observăm că referentul este uneori o mulțime practic infinită de obiecte (referentul lui *câine* este mulțimea tuturor câinilor care au existat, există și vor exista), alteori (ca în cazul lui *Oreste*) el este individualizat. Mai trebuie considerată și posibilitatea unui referent vid, cum este cel al expresiei *bucureștean în vârstă de 300 de ani.* Multe probleme delicate ale științei revin la dileme privind natura vidă sau nevidă, finită sau infinită a extensiunii unui anumit concept. De exemplu, pentru conceptul de „numere prime gemene" (adică numere prime a căror diferență este egală cu doi) nu se știe încă dacă extensiunea sa este sau nu infinită. De asemenea, unii cercetători sunt de părere că semnul literar este lipsit de extensiune, relevantă pentru el fiind numai *intensiunea* (în sensul lui Carnap).

Forma cea mai elaborată a reprezentării triunghiulare a procesului de semnificare a fost dată de Ch.S.Peirce, nume de care este legată constituirea semioticii ca știință (în a doua jumătate a secolului al XIX-lea). Peirce are în vedere nu numai semnul lingvistic, ci orice tip de semn: semnul constă dintr-un *reprezentant* care trimite pe de o parte la un *obiect*, pe de altă parte la un *interpretant*. De exemplu, în paradoxul Electra avem doi reprezentanți diferiți (expresiile *Oreste* și *persoana* din fața Electrei) care, deși trimit la același obiect (persoana lui Oreste), sunt corelați cu interpretanți diferiți (interpretantul lui *Oreste* este „fratele Electrei"), în timp ce *persoana din fața Electrei* are ca interpretant reprezentarea mintală pe care Electra o realizează în raport cu persoana din fața ei. În terminologia lui Carnap, Oreste este cunoscut de Electra din punct de vedere intensional, dar nu este recunoscut extensional.

Triunghiul semiotic al lui Peirce continuă şi azi să se afle în centrul atenţiei cercetătorilor. Rămân încă multe de descifrat în alcătuirea sa, este încă destul de obscură relaţia directă dintre obiect şi interpretant. Copilăria ne asaltează cu un mare număr de semne bogate prin extensiunea lor, cărora apoi încercăm, de-a lungul unei vieţi întregi, să le descoperim intensiunea. Oamenii pe care-i cunoaştem se repartizează într-o tipologie foarte bogată, după natura raportului care se stabileşte între cunoaşterea lor intensională şi cea extensională.

Shakespeare este cunoscut de un număr imens de oameni sub aspectul intensiunii, dar nu mai trăieşte nimeni dintre cei care l-au cunoscut în extensiune. Despre multe persoane (vecini de cartier, de exemplu) avem o cunoştinţă în extensiune, dar nu ştim mai nimic sub aspect intensional. Se poate întâmpla ca extensiunea şi intensiunea unui semn să rămână multă vreme despărţite. Voi relata în acest sens o întâmplare. Urmăresc de vreo 40 de ani cărţile lui Marin Preda, realizând astfel o destul de bună cunoaştere a sa în intensiune. În acelaşi timp, despre o persoană pe care o vedeam frecvent la un restaurant unde luam masa în anii '70 realizasem o destul de bună cunoaştere în extensiune, observându-i multe particularităţi fizice, gesturi, modul de a vorbi şi de a mânca. Abia după mult timp am aflat că persoana respectivă era scriitorul Marin Preda.

O variantă mai complicată a relaţiei dintre intensiune şi extensiune este aceea a actorului. Probabil că aici trebuie distins între actorul de teatru şi cel de film.

O altă situaţie interesantă este aceea a unui semn al cărui reprezentant trimite la alt referent decât cel real, datorită cunoaşterii insuficiente a sensului corespunzător. Iată o întâmplare care a survenit cu mulţi ani în urmă. Dintr-o relatare publicată în „Luceafărul" (numărul din 22 noiembrie 1980) aflu că un anume Gh. Păun a primit premiul pentru eseu la o consfătuire de la Timişoara, consacrată literaturii de anticipaţie. Un moment m-am gândit la matematicianul cu acelaşi nume, pe care-l cunosc bine de mai mulţi ani şi cu care colaborez, dar am exclus imediat posibilitatea ca el să fie cel premiat, deoarece îl

credeam departe de preocupările consfătuirii de la Timişoara. Mă gândeam chiar să-i fac o farsă, anunţându-l că a primit un premiu. Ulterior însă, am aflat chiar de la matematicianul Gh. Păun că trimisese un eseu, *Matematica şi literatura de anticipaţie*, care fusese premiat. Informaţia insuficientă de care dispuneam, sub aspect intensional, despre Gh. Păun, a determinat această formă, destul de frecventă de altfel, a paradoxului Electra. Vestea pe care colegul Păun mi-o aducea era şi în acelaşi timp nu era o noutate. Conflictul dintre sens şi referent se rezolvase, dar alte conflicte de acelaşi tip rămân posibile în continuare.

Posibilitatea ca două semne distincte să aibă aceeaşi componenţă referenţială fascinează pe cercetători. Expresii ca *femeia care a îndeplinit funcţia de preşedinte al Statelor Unite şi căţel care a scris un program de calculator,* în ciuda intensiunilor lor total diferite, sunt echivalente extensional (deoarece extensiunea lor este vidă). Un exemplu poate mai frapant de conflict între entităţi semiotice cu aceeaşi extensiune este dat de expresiile A = *Planeta care i-a dat pe Newton şi pe Beethoven* şi B = *Planeta pe care s-a efectuat în 1945 primul bombardament atomic*, care, deşi extensional echivalente (corespund aceluiaşi obiect: planeta Pământ), nu pot fi înlocuite una prin cealaltă într-o aserţiune ca „A are de ce să fie mândră". Intensiunile lor sunt nu numai diferite, ci şi (pragmatic) contradictorii.

Există şi situaţia inversă, a semnelor cu acelaşi sens, dar cu referent diferit. Aceasta se întâmplă atunci când reprezentările noastre nu pot distinge între două obiecte în fapt diferite. După ce vizitasem, în urmă cu vreo zece ani, mai multe oraşe americane, constatasem că în timp ce oraşe ca New York sau San Francisco îmi rămăseseră în amintire cu o personalitate bine conturată, altele, cum ar fi Cleveland şi Detroit, deveneau aproape indiscernabile; imaginile lor se contopeau în una şi aceeaşi, a oraşului american tip.

Se confirma încă o dată ideea lui Peirce, după care semnul este ceva care *pentru cineva* stă în loc de altceva.

La Rochefoucauld, Unamuno şi Ralea

Banca e o instituţie care-ţi împrumută o umbrelă când e timp frumos şi ţi-o cere înapoi când plouă (Jerome K.Jerome).

Viciile intră în compoziţia virtuţilor precum otrăvurile în compoziţia leacurilor (La Rochefoucauld).

Fiecare om poartă înlăuntrul său cele şapte vicii capitale opuse: orgolios şi umil, lacom şi reţinut, lasciv şi cast, invidios şi milostiv, zgârcit şi generos, leneş şi harnic, mânios şi răbdător. Şi poate scoate din el la fel de bine pe tiran şi pe sclav, pe criminal şi pe sfânt, pe Cain şi pe Abel (M.Unamuno).

Nu pot iubi decât ceea ce am libertatea să şi părăsesc (Wolf Biermann).

Partir c'est mourir un peu... Dar dacă versul poetului francez se potriveşte călătoriilor care urmează unei despărţiri de dragoste, el este pe de-a-ntregul fals pentru toate celelalte călătorii. A pleca, de cele mai multe ori înseamnă a reînvia [...] Puţini sunt aceia însă care se pot reînnoi. Cei mai mulţi urmăresc, în călătorii imposibile, visul nebun de a fugi de propria lor umbră. Un gând obsedant, mortal, îi întovărăşeşte pretutindeni. Ei fug ducând cu ei, fără voia lor, viermele care-i roade (Mihai Ralea).

Reflexii paradoxale şi sugestii de paradoxuri la Gr.C.Moisil

Dacă pot exista oameni de ştiinţă inculţi, iată o problemă care se poate discuta.

Orice poate fi demonstrat, chiar şi adevărul. Orice boală poate fi lecuită, chiar şi sănătatea. Te poţi îndrăgosti de orice femeie, chiar şi de aceea pe care o iubeşti. Orice portret poate fi asemănător, chiar şi o fotografie. Orice bărbat poate fi cuceritor, chiar propriul tău soţ. Orice bou poate fi divinizat, chiar şi boul Apis. Sunt atât de bine dispus, că pot râde de orice, chiar şi de o glumă. Orice pasăre pe limba ei piere, chiar şi papagalul. Orice glumă poate să te distreze, chiar şi cele de mai sus.

Intenţia lui Gr.C.Moisil este de a pune în evidenţă caracterul structural al umorului. De îndată ce structura unei glume, a unei vorbe de spirit a fost observată, putem produce în serie glume sau vorbe de spirit de acelaşi tip. Dar această structură, aproape convertibilă într-un algoritm (nu întâmplător articolul din care sunt extrase glumele de mai sus este intitulat Vorbe de duh şi calculatoare*) revine de fapt la un anumit tip de paradox, constând, în exemplele de mai sus, în suprapunerea excepţionalului cu normalul. Este normal ca adevărul să poată fi demonstrat, dar expresia „chiar şi adevărul" sugerează că acest fapt nu ar fi normal, ci excepţional. Gr.C.Moisil propune, în continuare, alte două structuri umoristice, pe care cititorul le poate analiza din punctul de vedere al paradoxului.*

Apa nu e bună nici măcar în cizmă. Nu oboseşte nici când nu face nimic. Nu vorbeşte nici în somn. N-aş pleca în Lună nici pe jos. X e un filozof, dar e un om care gândeşte. Y e un poet, dar e un om cu imaginaţie. Z e un matematician, dar e un om inteligent. W e un artist, dar e un om sensibil.

Şi omul şi-a uitat nevoile lui vechi, pentru a simţi lipsuri noi, pe care i le putea împlini tehnica.

Omul nu poate găsi ceea ce caută. S-a învăţat să se mulţumească cu ce poate găsi.

Ştie cineva că, dacă se adresează matematicii, trebuie să ştie să pună probleme? Să nu ceară ca matematica să-i rezolve problemele lui. Poate că alea nici nu sunt probleme. Poate că nu sunt decât şiruri de vorbe. Nu oricărui şir de vorbe îi corespunde un şir de idei: vezi descântecele.

Cineva spunea în glumă că ar fi nevoie de cărţi care să popularizeze matematica printre matematicieni.

Foarte multă vreme pierzi când crezi că ştii ce nu ştii. Mai exact: ce nu ştii încă. De învăţat tot o să le-nveţi, dar întâi crezi că le ştii şi nu le-nveţi; pe urmă, după ce ai văzut că nu merge ce-nveţi mai departe, că nu ştii ce trebuie să ştii, te miri: de ce nu merge? Până la sfârşit tot trebuie să le-nveţi. Şi anii nu se-ntorc înapoi. De aia e bine să fii lucid: să ştii că nu ştii ce nu ştii; şi să te pui pe învăţat. De la-nceput.

Fii lucid. Cât timp nu te-a băgat de seamă nimeni că nu ştii, dacă înveţi îţi stă bine.

Iată prima ispită a matematicianului: eşti ispitit să gândeşti asupra teoremelor pe care le faci, asupra disciplinei tale. [...] Iată a doua ispită a matematicianului: să devină inginer sau economist [...]. Aceasta e a treia ispită a matematicianului: să rămână numai matematician.

Omul nu progresează decât când ştie că nu poate să facă ce vrea.

Mijlocul cel mai sigur ca să-l faci pe un om tânăr să nu reuşească să facă ceva e să-l întrebi mereu: Ei, ţi-a ieşit?

Este logica o ştiinţă practică? Eu cred că e cea mai practică dintre ştiinţe, fiindcă te învaţă să iei decizii.

Eu ştiu că toţi înţeleg că atunci când se editează o carte şi nu se vinde, asta e risipă. Se înţelege oare că atunci când se editează în 2000 de exemplare o carte care s-ar vinde în 3000 de exemplare, şi asta e tot risipă?

[...] discuţia în public [...] trebuie să fie atât de bine pregătită, încât să pară improvizată.

[...] poate că se face o astfel de risipă fiindcă cei ce o fac nu înţeleg că este o risipă.

Altceva se schimbă, şi profesorul de azi va fi obligat să se schimbe pentru a face cursuri post-şcolare: fiecare curs se adresează unui singur ascultător, care poate nici nu este de faţă.

Azi facem matematica ce va fi folosită mâine şi mai ales poimâine. Că dacă n-am face-o azi, poimâine ar trebui s-o importăm.

Nimic nu costă mai scump decât neştiinţa.

Cum am mai spus, în ultimii ani vorbesc cu copiii. Sunt singurii care se interesează de adevărat de calculatoare.

Domnule profesor, m-am săturat de matematică până-n gât!

Da, dar matematica de la gât în sus începe!

Un copil, către Gr.C.Moisil: Dumneavoastră vă plac visele?

Da! Eu am visat odată că eram într-o şedinţă şi când m-am trezit eram într-adevăr într-o şedinţă!

Sunteţi specialist sau numai amator? – Numai amator... dar foarte amator!

Pentru Moisil, paradoxul este un simptom al stării normale, de sănătate; dar această stare este de multe ori în opoziție cu intuiția comună.

Situații paradoxale în *Cântăreața cheală*, de Eugen Ionescu

Are trăsături regulate și totuși nu se poate spune că e frumoasă. E prea înaltă și prea voinică. N-are trăsături regulate și totuși se poate spune că e foarte frumoasă. E cam micuță și cam slăbuță. E profesoară de canto (Domnul Smith). (*Abolirea principiului necontradicției*).

Cine? Bobby Watson – De care Bobby Watson vorbești? – De Bobby Watson, fiul bătrânului Bobby Watson, celălalt unchi al lui Bobby Watson, mortul. – Nu, nu-i ăla, e altul. E Bobby Watson, fiul bătrânei Bobby Watson, mătușa lui Bobby Watson , mortul. – Te referi la Bobby Watson, comis-voiajorul? – Toți Bobby Watson sunt comisvoiajori. (Dialog între Doamna și Domnul Smith). (*Suprapunerea identității și diferenței).*

Bună seara, dragi prieteni! Iertați-ne că v-am făcut să ne așteptați atât de mult. Ne-am gândit că vă datorăm onorurile la care aveți dreptul și de-ndată ce am aflat că binevoiți să ne faceți plăcerea de a veni să ne vedeți fără a vă anunța vizita, ne-am grăbit să ne ducem pentru a ne pune hainele de gală (d-na Smith). *Suprapunerea previzibilului și imprevizibilului.*

Ei bine, am asistat astăzi la un lucru extraordinar. Un lucru de necrezut. – Spune repede, scumpo. [...] am văzut pe stradă, alături de-o cafenea, un domn îmbrăcat cuviincios, în vârstă de vreo cincizeci de ani, nici atât chiar, care...[...] – St! Ce făcea domnul?

Ei bine, veți spune că inventez, pusese un genunchi jos și stătea aplecat. – Oh! – Da, aplecat. – Imposibil. – Ba da, aplecat. M-am apropiat de el să văd ce face... –Și? – Își înnoda șireturile de la pantofi, care se desfăcuseră. – Fantastic! Dacă n-ați fi dumneavoastră n-aș crede! – De ce nu? Când circuli, vezi lucruri și mai extraordinare. De pildă, astăzi, eu însumi am văzut în metrou un domn care stătea pe-o

bancă citindu-şi liniştit ziarul (dialog între dl.şi d-na Martin şi dl. şi d-na Smith). *Escaladarea suprapunerii banalului cu senzaţionalul, a cotidianului cu extraordinarul.*

Se aude sunând la uşa de la intrare. – Ia te uită, sună. – Probabil că e cineva. Mă duc să văd (Se duce , deschide şi revine). Nimeni. (Se reaşează)[...] (Soneria) – Ia te uită, sună. – Trebuie că e cineva. Mă duc să văd (Se duce. Deschide şi revine). Nimeni. [...](Soneria). – Ia te uită, sună. – Nu mă mai duc să deschid. – Bine, dar trebuie să fie cineva! – Prima oară n-a fost nimeni. A doua oară, la fel. De ce crezi că va fi cineva acum? – Fiindcă s-a sunat! – Nu-i un motiv. – Cum aşa? Când se sună la uşă, înseamnă că e cineva la uşă, care sună ca să i se deschidă uşa. – Nu întotdeauna. Aţi văzut chiar acum! – De cele mai multe ori, da. [...] Ei bine, mă duc să văd. Să nu spui că sunt încăpăţânată, dar ai să vezi că nu e nimeni! (Se duce să vadă. Deschide uşa şi o reînchide). Vezi, nu e nimeni. (Revine la locul ei) [...] (Se aude din nou sunând). – Ia te uită, sună. Probabil că e cineva. – (într-o criză de furie). Nu mă mai trimite să deschid uşa. Doar ai văzut că e de pomană. Experienţa ne învaţă că, atunci când se aude sunând la uşă, înseamnă că niciodată nu e cineva. (Dialog între dl. şi d-na Smith şi d-na Martin). *Paradoxul inducţiei, discutat de Carl Hempel şi Nelson Goodman.*

Acelaşi paradox este dezvoltat în continuare, după apariţia căpitanului de pompieri. Dl.Smith (către soţia sa, triumfător): „Vezi? Aveam dreptate. Când auzi sunând înseamnă că cineva sună. Nu poţi pretinde că dl. căpitan nu e cineva". D-na Smith: „Bineînţeles că nu". Dar îţi repet că mă refer numai la primele trei ori, fiindcă a patra nu contează". Aici se produce un paradox de o natură mai specială, constând în confuzia dintre procedeul inducţiei şi cel al reflexului condiţionat. Instalat după numai trei stimuli, reflexul nu poate dispărea după un singur stimul nou. Ulterior, următorul dialog ne aduce în punctul nodal al paradoxului inducţiei. Dl.Martin: „Până la urmă, tot nu ştim dacă atunci când se sună la uşă e cineva sau nu!" D-na Smith: „Niciodată nimeni". Dl.Smith: „Întotdeauna cineva". Pompierul: „Am să vă împac. Şi unul şi altul aveţi întrucâtva dreptate. Când se sună la uşă, uneori e cineva, alteori nu e nimeni".

Paradoxul dialogului cu destinatar, dar fără receptor, apare în cele ce urmează. Pompierul: „Voi încerca să-ncep, totuşi. Dar făgăduiţi-mi că n-o să ascultaţi". D-na Martin: „Dar, dacă nu v-am asculta, nu v-am auzi". Pompierul: „La asta nu m-am gândit". *Sabotarea actului de comunicare, prin solicitarea unei capacităţi de atenţie şi memorie care depăşeşte parametrii reali, altfel spus, un exemplu de competenţă lingvistică depăşind performanţa umană uzuală, apare în următoarea replică a pompierului* (din care reproducem numai o parte): „Guturaiul. Cumnatul meu avea, pe linie paternă, un văr primar, al cărui unchi pe linie maternă avea un socru, al cărui bunic pe linie paternă se-nsurase în a doua căsătorie cu o tânără băştinaşă, al cărei frate întâlinise într-una din călătoriile sale o fată de care se îndrăgostise [...] fiica unui fost medic de ţară, el însuşi frate de lapte cu fiul unui lăptar, la rândul lui fiul natural al unui alt medic de ţară, însurat de trei ori la rând, a cărui a treia soţie [...]". *În mod surprinzător, interlocutorul, dl.Martin, se dovedeşte a fi înzestrat cu o capacitate la fel de neobişnuită de atenţie şi memorie. Confuzia dintre competenţă şi performanţă, care părea să se constituie într-un act de sabotaj al comunicării, are un alt deznodământ. Încercarea (deliberată sau nu) de sabotare a comunicării eşuează. Dl.Martin se dovedeşte (sau simulează) a fi fost capabil să urmărească maratonicul discurs al pompierului şi preia ştafeta de acolo de unde acesta din urmă a lăsat-o.* D-l. Martin: „Am cunoscut-o pe această a treia soţie, dacă nu mă-nşel. Mânca pui de găină într-un viespar".

Încheierea piesei cu soţii Martin rostind exact aceleaşi replici pe care soţii Smith le-au rostit în prima scenă subliniază caracterul circular, recursiv, de închidere a buclei, care stă la baza întregului text. Acum lucrurile o pot lua de la capăt, cu eventuale permutări de roluri. Situaţiile, în esenţa lor, rămân mereu aceleaşi.

Cititorul poate dezvolta un exerciţiu similar cu alte piese ale aceluiaşi autor, de exemplu cu" Lecţia".

Întrebări şi răspunsuri. Anunţul duplicitar

Pe un zid se poate citi următorul anunţ:"Vă rugăm ignoraţi acest anunţ". Dacă-l luăm în considerare, atunci, conform conţinutului său, trebuie să-l ignorăm. Dacă-l ignorăm, atunci, fără să ne dăm seama, l-am respectat.

Cum trebuie să răspundă un martor, fără să se contrazică, unui preşedinte de tribunal care-i spune: „Vă rog răspundeţi *da* sau *nu* la următoarea întrebare: Va fi următorul cuvânt pe care-l veţi pronunţa cuvântul *nu?*"

Răspuns. Dacă răspunde *da*, înseamnă că primul cuvânt trebuia să fie *nu*, deci s-a contrazis. Dacă răspunde *nu*, înseamnă că trebuia să dea un răspuns afirmativ, deci iar s-a contrazis. Contradicţia nu poate fi evitată.

Un crocodil smulge un prunc din braţele unei mame şi-i promite să i-l restituie dacă mama poate răspunde corect la întrebarea: „Îţi voi mânca copilul?" Ce trebuie să răspundă mama?

Răspuns. Dacă răspunde *da*, pe de o parte crocodilul trebuie să-l mănânce, pentru a se conforma răspunsului afirmativ, pe de altă parte trebuie să-l restituie, ţinând seama de corectitudinea răspunsului. Deci contradicţie. Dacă răspunde *nu*, atunci crocodilul, mâncând pruncul, îşi va putea motiva actul prin faptul că mama nu a reuşit să dea un răspuns corect la întrebarea formulată. Deci este preferabil răspunsul afirmativ, care cel puţin îl pune pe crocodil în dificultatea de a lua o decizie.

Despre principiul incertitudinii

George Gamow (*The principle of uncertainty*, Scientific American, 1958, p.3) compară acest principiu al lui Heisenberg (după care evenimentele la scară atomică nu pot fi observate cu certitudine) cu următoarea situaţie: în lumea experienţei de fiecare zi putem observa fenomenele şi urmări proprietăţile lor, fără a influenţa într-un mod

semnificativ aceste fenomene. Dacă încercăm să măsurăm temperatura unei cești de cafea cu un termometru de baie, termometrul va absorbi atât de multă căldură din cafea, încât temperatura cafelei va fi modificată în mod sensibil. Dacă însă vom utiliza un mic termometru chimic, atunci influența sa asupra temperaturii cafelei va fi neglijabilă. Putem măsura temperatura unui obiect având dimensiunile unei celule vii dacă folosim un instrument miniatural, de o capacitate calorică aproape neglijabilă. Dar în lumea atomică nu putem niciodată urmări modificarea determinată de introducerea unui aparat de măsură.

Paradoxul dorinței

Există sau nu un paradox al dorinței în filozofia budistă? Wayne Alt (*There is no paradox of desire in Buddhism*, Philosophy East and West (Honolulu), vol.30. 1980, p.521-528) argumentează că dorința de a elimina dorința nu implică un paradox. Pentru a urma îndemnul „Renunță la dorințe" trebuie să dorești să urmezi îndemnul. Însă acesta este un pas necesar. Pentru a atinge dezideratul budist de suprimare a dorinței trebuie să începi prin a dori atingerea dezideratului; obiectivul nu poate fi atins la început. Însă se pot face pași în direcția sa prin înlăturarea dorințelor individuale. Pare să nu fie nici un paradox în a presupune că dorind aceasta, poți, în cele din urmă, să suprimi toate dorințele, inclusiv dorința de a le suprima pe toate. În replică, John Visvader (*Reply to W. Alt's There is no paradox of desire in Buddhism*, Philosophy East and West (Honolulu), vol.30, 1980, p.533-534) consideră că deși unele școli budiste dezvoltă paradoxul dorinței de a renunța la dorințe, aceasta nu anulează în nici un fel programul budist de renunțare la dorințe într-un sens relevant. Paradoxul este invocat într-un anumit stadiu, pentru a pune capăt acelui tip de dorință care produce o suferință și pentru a schimba un mod de gândire la care altfel s-ar renunța cu dificultate. Utilizarea paradoxului este fundamental terapeutică.

Paradox şi eroare

Unii autori abordează paradoxul ca un simptom al erorii. La doi dintre aceşti autori ne vom referi aici. Pentru Charles Chihara (*The semantic paradoxes: a diagnostic investigation*, The Philosophical Review, vol.88, 1979, p.590-610) un paradox este un argument care pleacă de la premise care par adevărate, dar care, procedând prin reguli de inferenţă aparent valide, se încheie cu o contradicţie. Problema de a diagnostica un paradox constă în identificarea sursei contradicţiei şi explicarea raţiunii pentru care şi a modului în care paradoxul s-a produs. Autorul este de părere că orice paradox provine din credinţa că un anumit enunţ de importanţă crucială este adevărat prin definiţie, prin stipulare sau prin ordin.

Ferenc Altrichter (A *konfirmácio paradoxonairól*. Magyar Filozófiai Szemle, vol. 1, 1980, p.25-43) îşi orientează preocupările spre aşa-numitele paradoxuri ale confirmării; paradoxuri ale inferenţei inductive de care se ocupase cu deosebire Hempel , considerându-le pe acestea nu iluzii psihologice, ci iluzii sintactice. Paradoxurile confirmării nu ar fi, după Altrichter, consecinţe ale unei singure ipoteze false, ci urmare a mai multor confuzii conceptuale şi ipoteze false. Fără aceste erori, paradoxurile confirmării nici măcar n-ar putea fi formulate; de îndată însă ce erorile (de natură filozofică) sunt eliminate, paradoxurile dispar.

Paradoxul atotputernicului

Discutat de mulţi autori, el este prezent şi în lucrarea lui Norbert Wiener (*God and Golem, Inc.*, The M.I.T. Press. Cambridge, U.S.A., 1964; versiunea românească: *Dumnezeu şi Golem*, S.A. Editura Ştiinţifică, 1969). Poate face atotputernicul o piatră atât de grea încât nici el să n-o poată ridica? Dacă răspunsul este negativ, atotputernicia sa este contrazisă; dacă răspunsul este afirmativ, înseamnă că va exista o piatră pe care n-o poate ridica, deci din nou atotputernicia sa este contrazisă.

Wiener consideră că este vorba aici de unul dintre nenumăratele paradoxuri care apar în jurul noţiunii de infinit. După Wiener, un superlativ ca *atotputernic* nu este un superlativ real, ci o modalitate arbitrară de exprimare a unei puteri foarte mari. Nu este vorba aici de o simplă speculaţie verbală, ci de o situaţie frecventă în societatea contemporană: Poate exista o competiţie reală între un creator şi creaţia sa? Atotputernicul este deci aici o metaforă care trebuie urmărită în semnificaţiile ei umane. Wiener se referă ia Cartea lui Iov şi la celebra epopee a lui John Milton, *Paradisul pierdut*, unde apare o competiţie (pentru sufletul lui Iov sau pentru sufletul omenirii în general) între Dumnezeu şi o creatură a sa, diavolul. Wiener observă că la prima vedere un asemenea joc pare nereal. Orice răscoală a îngerilor rebeli pare sortită eşecului. Totuşi, dacă fiinţa atotputernică trebuie să recurgă la bombardamentele cereşti ale tunetelor, înseamnă că nu este atotputernică, ci doar foarte puternică. De altfel, diavolul are o isteţime excepţională şi, deşi creatură a lui Dumnezeu, poate intra în competiţie cu acesta. În general, observă Wiener, un creator, oricare ar fi el, chiar un creator cu puteri mărginite, poate intra într-o competiţie reală ca propria sa creaţie; este exact situaţia care devine interesantă mai cu seamă în ceea ce priveşte maşinile care-şi ameliorează activitatea pe baza experienţei (a se vedea capitolul II din cartea menţionată a lui Wiener; între timp, progresele inteligenţei artificiale au confirmat şi mai bine ipoteza lui Wiener). „Condiţia principală pentru ca un efort uman să poată fi interpretat ca o partidă de joc este posibilitatea stabilirii unor criterii obiectiv valabile pentru determinarea calitativă a performanţei realizate prin efortul respectiv; în cazul contrar, jocul devine lipsit de sens, ca în partida de crocket din povestirea *Alice în Ţara Minunilor*, unde mingile erau arici care se dezghemuiau, ciocanele erau flamingi, arcurile erau soldaţi de carton care umblau încoace şi încolo pe câmp, iar arbitrul era Regina Inimilor, care mereu schimba regulile jocului şi-i trimitea pe jucători să-i decapiteze. În astfel de împrejurări, nu se poate câştiga şi nu se poate învăţa o tactică eficientă, deoarece nu există criterii de reuşită“ (Wiener, op. cit., p.31).

Richard R. La Croix (*Is there a paradox of omniscience?* The Modern Schoolman, U.S.A., vol.56, 1979, p.251-265) se referă la J.L. Cowan, care consideră că paradoxul omnipotenţei (= atotputerniciei) nu poate fi explicat prin aceea că duce la o contradicţie: el duce la o contradicţie, deoarece conceptul de omnipotenţă ca atare este contradictoriu, după cum pretinde Cowan că arată printr-un argument formal. Un statut asemănător este pus în evidenţă de Cowan pentru conceptul de omniştiinţă (= ştiinţa celui a toate cunoscător). La Croix îşi propune să arate că cele două concepte, cel de omnipotenţă şi cel de omniştiinţă, nu au acelaşi statut; în timp ce primul este contradictoriu, al doilea nu este.

Antinomia vizitatorului unui castel

La intrarea într-un castel „un vizitator este întâmpinat de proprietarul castelului, care-i cere să prevadă ce anume i se va întâmpla în castel, urmând ca, în cazul în care răspunsul se dovedeşte a fi necorect, vizitatorul să fie spânzurat. Vizitatorul răspunde că va fi spânzurat de frânghia care tocmai se vede în faţa sa, atârnată de plafonul castelului. Va fi spânzurat?

Răspuns: Dacă ar fi spânzurat, atunci ar rezulta că vizitatorul a prevăzut corect ce i se va întâmpla, deci chiar prin aceasta el are dreptul să nu fie spânzurat. Dacă n-ar fi spânzurat, atunci previziunea sa s-ar dovedi falsă, deci ar trebui să fie spâzurat.

Hotelul imaginar

1. Un hotel are o infinitate de camere, numerotate 1, 2, 3 ... n, toate camerele fiind ocupate. Sosește la hotel un nou călător şi întreabă dacă există o cameră liberă. Hotelierul răspunde afirmativ şi, după ce îi mută pe locatari într-un mod corespunzător, fără însă a-i pune într-o aceeaşi cameră pe cei care erau în camere diferite, eliberează o cameră, în care-l introduce pe noul sosit. Cum a procedat?

Răspuns. Îl mută pe cel din camera 1 în camera 2, pe cel din camera 2 în camera 3, pe cel din camera 3 în camera 4 ş.a.m.d., pe cel din camera n în camera n+1 (oricare ar fi valoarea lui n). În acest fel se eliberează camera 1.

2. Să ne referim din nou la hotelul de mai sus, cu o infinitate de camere, toate ocupate. Să presupunem că sosesc la hotel o infinitate de noi călători a_1, a_2, a_3, ..., a_n,... Cum ar putea fi găzduiţi, fără a fi dat afară din hotel vreunul dintre locatarii existenţi şi respectând dorinţa fiecărui locatar de a fi lăsat singur în cameră?

Răspuns. Hotelierul transferă pe cel din camera 1 în camera 2, pe cel din camera 2 în camera 4, pe cel din camera 3 în camera 6, ş.a.m.d. pe cel din camera n în camera 2n (pentru fiecare valoare a lui n). Se eliberează astfel toate camerele cu numere impare, iar călătorul a_n este introdus în camera $2(n - 1) + 1$ (deci a_1 intră în camera $2 \cdot 0 + 1 = 1$, a_3 în camera $2 \cdot 2 + 1 = 5$ ş.a.m.d.).

O carte derutantă

Să ne imaginăm o carte ale cărei foi au grosimi diferite, fiecare foaie fiind de două ori mai subţire decât cea precedentă. Fiecare pagină este urmată de o alta, în timp ce între ea şi prima pagină se află un număr finit de pagini. Cartea, frumos legată în piele, se află pe masă, în faţa noastră. Un copil se strecoară şi întoarce cartea, în aşa fel încât coperta din faţă să se afle dedesubt, iar coperta din spate să se afle deasupra. După aceasta, deschide cartea. Ce pagină a cărţii devine vizibilă pentru copil, prin această operaţie?

Care este grosimea totală a cărţii?

Răspuns. Deoarece fiecare pagină este urmată de o alta, cartea are o infinitate de pagini; nu există o pagină care să fie ultima. Prin aşezarea cărţii cu coperta din faţă dedesubt, prima pagină a cărţii devine ultima, dar nici o pagină nu poate deveni prima. Deci nici o pagină nu devine vizibilă prin operaţia indicată.

Neglijând grosimea coperţilor, grosimea cărţii va fi dublul grosimii primei foi (se aplică formula sumei unei progresii geometrice infinite, cu raţia cuprinsă între 0 şi 1).

O altă carte derutantă

Logicianul Alfred Tarski a imaginat o carte de o sută de pagini cu câte o singură propoziţie pe fiecare pagină. Pe fiecare dintre paginile de la 1 la 99 scrie: propoziţia tipărită pe pagina următoare este adevărată. Dar, surpriză: la pagina 100 stă scris: Propoziţia tipărită pe prima pagină a acestei cărţi este falsă. Cum sunt propoziţiile acestei cărţi: adevărate sau false?

Răspuns: Să luăm ca exemplu propoziţia de la pagina 1. Dacă ea este adevărată, atunci, urmând paginile următoare, rezultă că ea este falsă. Dacă însă o presupunem falsă, rezultă că ea este adevărată. Ne aflăm în plină antinomie.

Două feluri de adjective

În 1908, matematicianul german Kurt Grelling a introdus următoarea distincţie: se numeşte *heterologic* orice adjectiv care nu are proprietatea pe care o exprimă (de exemplu, *lung* sau *Romanian*; primul este de o singură silabă, deci scurt, deşi desemnează exact proprietatea opusă, iar cel de-al doilea este un adjectiv englezesc, deşi exprimă proprietatea de a fi românesc). Se numeşte *autologic* orice adjectiv care are el însuşi proprietatea pe care o exprimă (de exemplu, *scurt* şi *românesc*). În raport cu această distincţie, cum este adjectivul *heterologic*? Este el, la rândul său, heterologic sau autologic?

Răspuns. Dacă ar fi heterologic, atunci nu ar putea avea proprietatea pe care o exprimă, deci ar trebui să fie autologic. Dacă ar fi autologic, atunci ar avea proprietatea pe care o exprimă, deci ar fi... heterologic. Din această dilemă nu putem ieşi!

Protagoras şi tânărul avocat

Un tânăr avocat stabilise următoarea înţelegere cu profesorul său, Protagoras. Dacă va câştiga primul său proces, atunci îi va plăti pentru instrucţia pe care a primit-o; în caz contrar, nu; însă tânărul avocat tergiversa implicarea sa ca apărător într-un proces, astfel încât până la urmă Protagoras a forţat lucrurile, intentându-i el însuşi un proces, prin care reclama banii. În mod firesc, tânărul avocat decise să se apere singur. A trebuit sau nu să plătească lui Protagoras?

Răspuns: Dacă Protagoras a pierdut procesul, atunci situaţia este contradictorie. Pe de o parte, Protagoras, pierzând, nu va avea dreptul să primească vreo plată; dar pe de altă parte, procesul pierdut de el înseamnă un proces câştigat de tânărul avocat; cum este şi primul său proces, ar trebui, conform convenţiei, să-i plătească lui Protagoras. Dacă Protagoras a câştigat procesul, atunci situaţia este din nou contradictorie; pe de o parte, câştigătorul ar trebui să primească o răsplată, dar, pe de altă parte, procesul câştigat de el înseamnă pierderea de către tânărul avocat a primului său proces, deci conform înţelegerii, dreptul său de a nu-l plăti pe Protagoras.

În esenţă, oricare ar fi deznodământul procesului, Protagoras are şi nu are dreptul de a fi plătit de către tânărul avocat. Dacă pierde câştigă şi dacă câştigă pierde, datorită dublei sale ipostaze: aceea de profesor al tânărului avocat şi de parte în proces cu acesta din urmă. Când avocatul are de plătit profesorului său, este îndatorat faţă de cel care l-a dat în judecată, iar când este îndatorat faţă de acesta din urmă, nu e faţă de primul.

Dilema închisorii

Conducerea unei închisori din statul Mississippi a luat următoarea decizie: Să se construiască o nouă închisoare din materialele vechii închisori, aceasta din urmă trebuind să rămână în folosinţă până la terminarea construcţiei noii închisori. Cum s-a procedat?

Răspuns. Nici dărâmarea vechii închisori, nici construcţia celei noi nu pot să înceapă.

Un paradox care nu e antinomie

Matematicianul englez P.R.B. Jourdain (*Tales with philosophical morals*, The Open Court, vol. 27, 1913, Chicago, p. 310-315) a imaginat o foaie albă de hârtie având scris pe una dintre paginile ei următorul anunţ: *Enunţul de pe cealaltă pagină a acestei foi este fals*. În ce situaţie se află cele două enunţuri?

Răspuns. Cele două enunţuri se neagă reciproc, deci este vorba de un paradox. Dar nici unul dintre enunţuri nu-l implică pe celălalt, deci nu avem o antinomie şi nici măcar o semiantinomie. Discuţia unor probleme de acest fel este mai delicată decât poate să pară la prima vedere, încât până şi un Bertrand Russell s-a putut înşela la un moment dat (în *Autobiografia* sa), corectându-se însă ulterior.

Cu privire la problema de mai sus, nu toţi cercetătorii sunt de acord cu soluţia prezentată. Astfel, Maurice Harvey (într-o scrisoare către revista „The Listener" din 23 iulie 1970) pretinde că în cazul foii cu *fals* pe ambele pagini, nu numai că nu ştim care dintre enunţuri este adevărat şi că este inerent imposibil de a se decide, dar că orice decizie, deşi coerentă în ea însăşi, este inseparabilă de propria ei contradicţie. El crede că este vorba de o situaţie în care fiecare enunţ, pe lângă formularea convenţională a propriului ei adevăr, formulează falsitatea unui alt enunţ, pe care-l neagă, formulând astfel din nou propriul său adevăr.

O dispută între Gardner şi Hughes-Brecht

Acelaşi P.E.B. Jourdain a propus, în 1913, următoarea situaţie: pe una din paginile unei foi se află enunţul: *Enunţul de pe cealaltă pagină a acestei foi este fals*. Care este statutul acestor enunţuri? Creează ele sau nu un cerc vicios?

Răspunsul este controversat. Martin Gardner, *(Logical paradoxes*, Antioch Review, Summer 1963, p. 174) nu consideră că situaţia are un caracter autoreferenţial. Patrick Hughes şi George Brecht (*Vicious*

circles and infinity, Penguin Books, 1975-1979, New York) sunt de altă părere. Ar fi adevărat să afirmăm că nici unul dintre cele două enunţuri, luat separat, nu este autoreferenţial, deci nu este antinomic. Dar ansamblul celor două enunţuri este antinomic şi autoreferenţial.

O altă versiune a acestei probleme a fost propusă de Valdis Augstkalns (într-o scrisoare către „The Listener", Londra, din 9 iulie 1970), înlocuind foaia de hârtie cu o bandă a lui Möbius (la care, după cum se ştie, distincţia dintre cele două pagini nu mai poate fi operată, existând o singură pagină).

Două oglinzi faţă în faţă

Poveste pentru copii: „Era o noapte întunecoasă şi furtunoasă, ploaia cădea în torente, briganzii cutreierau munţii, iar şeful lor îi spusese lui Antonio: „Antonio, spune-ne o poveste". Iar Antonio, înfricoşat în faţa puternicului său şef, începu povestea sa: „Era o noapte întunecoasă şi furtunoasă, ploaia cădea în torente, briganzii cutreierau munţii...". Cum evoluează povestea?

Răspuns. Autoreferinţa conduce la o regresiune infinită de poveşti şi povestitori. Autoreferinţa şi infinitatea îşi dau aici mâna.

Paradoxul becului

Să ne imaginăm un bec care, pornind de la momentul zero, este aprins pentru o jumătate de minut, apoi stins pentru un sfert de minut, apoi din nou aprins pentru o optime de minut, apoi din nou stins pentru o optime de minut şi aşa mai departe. La momentul 2n – 1 becul este aprins pentru a 2n – 1-a parte dintr-un minut, iar la momentul 2n becul este stins pentru a 2n-a parte dintr-un minut. După cum se vede, durata totală a acestor operaţii alternative de aprindere şi stingere a becului (operaţii în număr infinit) este de un minut (suma progresiei geometrice infinite în care primul termen şi raţia au aceeaşi valoare, de 1/2). Întrebarea este: Cum va fi becul, după exact un minut, *aprins* sau

stins? Imposibilitatea de a răspunde la această întrebare se datorește unei alunecări de planuri. Becul oscilează între starea *aprins* și starea *stins* în raport cu imparitatea, respectiv paritatea numărului de ordine al operației performante. Însă distincția impar-par este definită pentru numerele naturale. Deoarece, după scurgerea unui minut, au fost performate o infinitate de operații, distincția impar-par nu mai are sens, deci întrebarea însăși privind starea becului după un minut nu mai poate primi un răspuns numai pe baza datelor care ne stau la dispoziție. Nici implicarea procesului de convergență a seriei considerate sau a subseriilor ei nu ne ajută să ieșim din impas. Problema se dovedește a fi de tipul acelora care, indicând dimensiunile unui vapor, cer să se afle... vârsta căpitanului. Alunecarea de planuri care s-a produs aici este aceea de la numere ordinale finite la numere ordinale transfinite.

Seriile cu termeni pozitivi. Ahile și broasca

Tot o serie cu termeni pozitivi este implicată și în paradoxul zenonian al lui Ahile și broasca țestoasă. În momentul inițial, broasca se află în poziția a_1. După durata t_1, Ahile ajunge și el în poziția a_1, dar între timp broasca a avansat în poziția a_2, unde Ahile ajunge după durata t_2. Pentru a avansa din a_2 în noua poziție a_3 a broaștei, Ahile are nevoie de o nouă durată, fie ea t_3 ș.a.m.d. Timpul de care are nevoie Ahile pentru a ajunge din urmă broasca este dat de suma seriei $t_1 + t_2 + ... + t_n + ...$ Dacă seria este divergentă (de exemplu, în cazul $t_n=1/n$), Ahile nu ajunge niciodată broasca. Dacă însă seria este convergentă (de exemplu, în cazul $t_n=1/n^2$), Ahile ajunge broasca după un timp egal cu suma seriei. Este interesant de observat aici că nu este suficient ca distanța dintre Ahile și broască să se micșoreze mereu pentru ca Ahile să ajungă broasca; mai trebuie ca această micșorare să fie destul de substanțială (cum se întâmplă de fapt cu Ahile cel iute de picior și broasca renumită pentru încetineala ei).

I-au trebuit însă omenirii vreo 2000 de ani pentru a realiza că o succesiune infinită de durate pozitive nu este obligatoriu de sumă totală infinită.

Paradoxul obligației și permisiunii

Pare limpede că ceea ce este obligatoriu trebuie să fie și posibil, după cum pare la fel de clar că ceea ce este imposibil nu poate fi obligatoriu. Putem deduce de aici că ceea ce este imposibil nu este nici măcar permis? O atare întrebare se situează probabil dincolo de intuiția comună și de simțul moral comun. Logicianul Jaakko Hintikka propune următorul raționament pe baza căruia ar rezulta că ceea ce nu este posibil este interzis (A se vedea A.N. Prior, *Deontic logic*, în „The Encyclopedia of Philosophy", vol. 4, New York, 1967, p. 511). Hintikka procedează în trei etape. 1) A face ceva care nu poate fi obținut fără a recurge la ceva interzis este un lucru interzis,însă 2) ceea ce nu poate fi făcut deloc nu poate fi făcut fie că recurgem sau nu la ceva interzis. Dacă X este imposibil, iar Y este un lucru interzis, nu poți nici să faci atât X cât și Y, nici să faci X fără a face Y. Însă, în conformitate cu 1), dacă Y este un lucru interzis și dacă este imposibil să faci X fără a face Y, atunci este interzis să faci X. Deci 3) dacă este imposibil să faci X, atunci este interzis să faci X.

Un schimb de replici din *Alice în Țara Minunilor*

„Nimeni pe drum", spuse Alice. Aș dori și eu să am astfel de ochi cu care să pot vedea pe Nimeni! Și încă de la așa o distanță!", observă regele pe un ton supărat.

Un paradox al inducției

În 1937, Carl Hempel a publicat în periodicul suedez *Theoria* următorul paradox privind inducția. Enunțul *Toate ciorile sunt negre* implică enunțul *Toate obiectele care nu sunt negre nu sunt ciori* perfect

echivalent cu primul enunţ. Rezultă că orice obiect care confirmă cel de-al doilea enunţ va confirma automat şi primul enunţ. Să presupunem că am identificat un obiect cafeniu care nu este o cioară, ci o ...vacă (aici intervine în engleză un joc de cuvinte, deoarece cioară = *crow*, vacă = *cow*). Vaca de culoare cafenie este o confirmare a enunţului al doilea. Prin acest enunţ, şi adevărul primului enunţ devine mai probabil. Acelaşi argument se aplică şi altor obiecte care nu sunt negre, de exemplu unui elefant alb. Comentând acest paradox, Martin Gardner aminteşte observaţia ironică după care, în zilele ploioase, un ornitolog care cercetează culoarea ciorilor îşi poate continua cercetarea fără măcar să simtă vreo picătură de ploaie. Este suficient ca, rămânând acasă, să privească cu atenţie în camera sa, inventariind tot felul de obiecte care nu sunt nici de culoare neagră, nici ciori. În pofida aparenţei anecdotice a situaţiei de mai sus, analiza paradoxului lui Hempel a permis să se înţeleagă mai bine structura logicii inductive. De altfel, trebuie să avertizăm pe cititor să nu se lase păcălit de aparenţa anecdotică a multora dintre paradoxuri. Dincolo de anecdotă se află de multe ori fenomene profunde, de a căror înţelegere depinde esenţial progresul cunoaşterii umane. Dar să mai relatăm o situaţie asemănătoare celeia invocate de Hempel (Patrick Hughes – George Brecht, op. cit., p. 58-59).

Într-o instituţie lucrează un număr de dactilografe, dintre care unele au păr blond. Dorim să testăm ipoteza după care toate aceste dactilografe blonde sunt căsătorite. Un mod natural de a se afla aceasta este de a întreba pe fiecare dintre ele dacă este căsătorită. Totuşi, o cale mai eficientă pare a fi următoarea: să cerem serviciului personal al instituţiei lista dactilografelor necăsătorite, după care să controlăm culoarea părului lor. Dacă nici una nu este blondă, atunci ipoteza este confirmată.

Însă în timp ce dactilografele unei instituţii, fie ea oricât de mare, nu pot depăşi un număr de ordinul zecilor, cel mult al sutelor, numărul ciorilor văzduhului este imens. În plus, există o disproporţie enormă între numărul ciorilor şi cel al obiectelor care nu au culoarea neagră.

Ar fi cu totul ineficient să controlăm obiectele care nu sunt negre în loc de a controla ciorile. Numărul obiectelor de altă culoare decât negru este atât de mare încât este ilariant să credem că identificarea unei vaci cafenii sporeşte într-adevăr plauzibilitatea ipotezei după care toate ciorile sunt negre. Mai este ceva! Identificarea unei vaci cafenii pledează tot atât de bine pentru ipoteza după care toate ciorile ar fi albe sau galbene. Deocamdată, logicienii nu au ajuns la un punct de vedere comun în această delicată problemă.

Un paradox geografic

O insulă este definită drept o porţiune de uscat înconjurată de apă, iar un lac drept o porţiune de apă înconjurată de uscat. Să presupunem că emisfera nordică ar fi formată numai din uscat, iar emisfera sudică numai din apă. În aceste condiţii, este legitim să considerăm emisfera nordică o insulă sau emisfera sudică un lac?

Adevărul cu paradox

Cuvintele adevărate par totdeauna paradoxale, dar acest fapt este inevitabil (Lao Tze). Este vorba aici, fără îndoială, de revelarea unor adevăruri *noi*; altfel, după cum observa Gr. C. Moisil, adevărul devine o banalitate.

Paradoxuri ale autoînşelării

John Canfield şi Parick NcNally (*Paradoxes of self-deceptions*, Analysis, 1961) atrag atenţia asupra situaţiei bizare în care se află un om care se minte pe sine: el începe să creadă în lucruri despre care ştie că sunt false, încălcând astfel principiul necontradicţiei, deci alunecând în paradox. Iată, de exemplu, o persoană care s-a minţit pe sine în a crede că este un mare artist. El se comportă ca şi cum ar fi un mare artist şi chiar crede că este. Însă, în fundul conştiinţei sale el este, cel

puţin din când în când, ros de îndoieli în ceea ce priveşte valoarea sa. Am putea exprima situaţia astfel: El crede şi în acelaşi timp nu crede că este un mare artist. Autorii menţionaţi consideră că această aserţiune poate fi interpretată în două feluri: a) el crede că este un mare artist şi nu are încredere că este un mare artist b) el crede că este un mare artist şi este fals că el crede că este un mare artist. Dintre aceste două interpretări, numai a doua ar fi un enunţ contradictoriu (deci paradoxal). Însă, aşa cum a fost descrisă situaţia, interpretarea corectă pare a fi cea dintâi. Pentru Canfield şi McNally singurul paradox implicat aici constă în faptul că o stare de lucruri autentică apare într-o situaţie logică ciudată; contradicţia n-ar fi deci formală, ci informală. De fapt, aici este vorba de acea stare a treia care, într-o altă formă, apare la Lupasco. Situaţia persoanei în discuţie este aceea a unei tensiuni între încrederea şi lipsa de încredere în valoarea sa. Paradoxul nu este de natură logică, ci pragmatică; în legătură cu acest paradox, a se vedea şi Jeffrey Foss *Rethinking. Self-Deception*, (American Philosophical Quartely, Oxford, England, vol. 17, 1980, p. 237-242), care argumentează posibilitatea sa logică şi practică.

O întrebare a lui N. Rashevsky

N. Rashevsky (*Life, information theory and topology, Bulletin of Mathematics and Metaphysics*, vol. 17, 1955) a formulat următoarea întrebare (pe care o lăsăm cititorilor pentru a o comenta): Fiind dată o limbă scrisă *L*, câte cuvinte din *L* trebuie să conţină o carte tipărită în limba *L*, pentru a putea conţine informaţia completă necesară producerii cărţii?

Capitolul IV
ÎN LUMEA ŞAHULUI

Este şahul matematică?

S-a spus de multe ori că şahul este matematică. Elementul cel mai izbitor în această analogie îl constituie caracterul deductiv şi condiţionarea riguroasă a fiecărei etape de etapele anterioare. De aici, ideea de *calcul* subijacentă atât şahului cât şi matematicii. În sprijinul acestei analogii pledează şi pasiunea pentru şah a multor matematicieni. Unii dintre ei au la activul lor performanţe în ambele domenii. După primul campion mondial de şah, Steinitz, a urmat un important algebrist, Emmanuel Lasker, care a devenit bine cunoscut atât ca şahist, fiind într-o anumită perioadă campion mondial (1894-1921), cât şi ca matematician. Să menţionăm în primul rând celebrul său memoriu *Zur Theorie der Moduln und Ideale* (publicat în revista Mathematische Annalen, vol.60, 1905, p. 20-116), prin care Lasker se manifestă ca un important continuator al marelui aritmetician şi algebrist Richard Dedekind (în ceea ce priveşte aritmetica întregilor algebrici) şi ca un precursor al celebrei algebriste Emmy Noether (al cărei părinte, Max Noether, de asemenea matematician, l-a inspirat pe Lasker, prin importanta sa lucrare privind curbele algebrice *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen*, Mathematische Annalen, vol.6, p. 351 – 359). Cel de-al cincilea campion mondial de şah, olandezul Max Euwe, era profesor de matematică şi director al unui institut de electronică.

Deducţia nu primează nici în şah, nici în matematică

Totuşi, afinitatea dintre şah şi matematică a fost de multe ori contestată. Este mai întâi interesant faptul că o serie de matematicieni au contestat ideea că matematica ar fi în primul rând deducţie. Cel mai recent exemplu în această privinţă îl constituie Paul R.Halmos (în cartea sa *I want to be a mathematician*, Springer, New York, 1985). Am avut totdeauna impresia că logica deductivă este numai faţada şi igiena matematicii, nu şi subtanţa ei. Nu cumva un fenomen asemănător se întâmplă cu şahul? Răspunsul este probabil afirmativ. Nell Charness, care în 1974 susţinuse o teză de doctorat privind psihologia jocului de şah, a ajuns la concluzia că un jucător de şah se bazează nu atât pe analize deductive, cât pe capacitatea sa de memorie şi pe organizarea informaţiei în termeni de configuraţii plauzibile de piese, mişcări posibile şi consecinţe ale lor. Recunoaşterea configuraţiilor face parte din preocupările unui domeniu în plină dezvoltare, *Recunoaşterea formelor* (*Pattern Recognition*). De asemenea, după cum arăta Peter W.Frey (*Chess skill in man and machine*, Springer, New York, 1977), alegerea unei mutări pare să fie condiţionată în primul rând de calitatea percepţiei şi, în mod special, de capacitatea de a recunoaşte un imens număr de procedee de joc disponibile, deci acumulate şi catalogate de experienţa şahistă anterioară. Şahul s-a dovedit a fi nu atât un joc implicând un calcul foarte lung cât unul de observaţie, de intuiţie a situaţiei de pe tabla de joc. Unui maestru îi este suficientă o privire sumară pentru a sesiza o mutare bună, în timp ce un începător este în stare ca, chiar după o lungă reflecţie, să facă o mutare dezavantajoasă. Ceea ce-i deosebeşte nu este neapărat profunzimea gândirii. Arborele de posibilităţi care mereu se ramifică în funcţie de răspunsul ipotetic al partenerului este de obicei examinat până la un nivel care este acelaşi şi la un simplu amator şi la un specialist. Acest nivel pare a fi determinat nu de gradul de pregătire şahistă, ci de restricţiile generale care guvernează atenţia, memoria şi raţiunea. Însă în timp ce profanul analizează aceste posibilităţi la întâmplare, cunoscătorul le ierarhizează aproape spontan, dând prioritate anumitor variante.

Între Hermann Hesse și Gr.C.Moisil

Într-o convorbire cu studenta Irina Gorun (mai 1973), Gr.C.Moisil este provocat de interlocutoare în ceea ce privește o posibilă asociere a matematicii cu faimosul joc cu mărgelele de sticlă al lui Hermann Hesse. Răspunsul lui Moisil: „Problema așa nu știu să se fi pus, dar nu este mult diferită de problema care s-a pus sau, mai repede, afirmația care s-a făcut: „matematica – joc de șah". Evident, deosebirea dintre afirmația gravă „matematica – joc de șah" și afirmația zglobie, „matematica – joc de mărgele" este sensibilă pentru oricine, dar asemănarea lor este mai accentuată decât deosebirea. Cel puțin la prima vedere. Adică privitor la „gratuitatea" matematicilor, fiindcă afirmația „matematica este un joc de șah" implică existența unor reguli foarte rigide /.../ Sunt regulile raționamentului deductiv". Să amintim că „jocul cu mărgelele de sticlă" nu este niciodată explicitat în romanul lui Hesse, el trebuie construit prin imaginație de fiecare cititor, ca o formă supremă a interferenței matematicii cu muzica, dominând întreaga activitate creatoare (fie ea științifică sau artistică) a unei societăți utopice. Tocmai în această opoziție între caracterul implicit al regulilor jocului lui Hesse și caracterul explicit al regulilor jocului de șah se află explicația preferinței lui Moisil pentru analogia matematică – șah față de analogia matematică – jocul cu mărgele de sticlă. Însă, după ce a văzut în regulile raționamentului deductiv substratul comun al șahului și matematicii. Moisil revine la analogia dintre matematică și jocul lui Hesse: „E probabil că unii matematicieni au impresia că joacă un joc cu mărgelele de sticlă. Am impresia, din amintirile mele, că această atitudine este caracteristică pentru o anumită vârstă. Nu face rău nimănui, fiindcă jocul matematic poate să apară celui care îl joacă un joc gratuit (cuvântul *gratuit* se întrebuința adesea pe vremea mea). Nu înseamnă că ceea ce i se pare cuiva că e gratuit chiar e gratuit. Nu e exclus ca cel care juca jocul cu mărgelele de sticlă să fi fost un muncitor care organiza refracții și reflecții multicolore în mărgelele de sticlă ce serveau, fără ca el să știe, unei industrii foarte folositoare

societăţii în care se petrece romanul (...). Altora poate li se pare că facem un joc cu teoreme care nu servesc nimănui, cu demonstraţii inutile. Văzută din afara lumii şi a timpului, matematica poate să pară un joc".

Şahul şi inteligenţa artificială

O întrebare se pune. Oare bănuiala lui Moisil că jocul cu mărgelele de sticlă ar fi putut avea şi o funcţie utilitară nu este la fel de legitimă, în ceea ce priveşte şahul? Ce altceva este lucrarea fostului campion mondial M.Botvinnik pe care am cunoscut-o în traducere în engleză (*Chess and long-range planning*, Springer, New York, 1970), în care se încearcă valorificarea strategiilor şahiste în metodologia planificării economice pe termen lung? Ce este cercetarea întreprinsă de A.Newell, J.Shaw şi H.Simon (*Chessplaying programs and the problem of complexity*, IBM, J.Res. Develop. 1958, no.2, p.320-335) şi mai cu seamă aceea efectuată de A.Newell şi H.Simon (*Human problem solving*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.S.) pentru care lămurirea naturii gândirii şahiste poate avea consecinţe importante în ceea ce priveşte înţelegerea gândirii algoritmice şi a inteligenţei artificiale, dacă se ia în considerare şi laboratorul experimental pe care-l constituie şahul computaţional. Exemplele nu se opresc aici. Şahul constituie un model epistemologic pentru numeroase discipline ştiinţifice, de la lingvistică şi semiotică până la etnologie şi matematică. Spre deosebire de jocul cu mărgelele de sticlă, a cărui funcţie utilitară este pur ipotetică, jocul de şah şi-a şi dovedit capacitatea explicativă în raport cu fenomene culturale dintre cele mai variate.

De la Shannon la Botvinnik

Claude E. Shannon (*Programming a computer for playing chess*, „Philosophical Magazine", 1950, vol.41, p.256-275) este primul care şi-a pus problema realizării unui program de calculator pentru şah. Se ştie că activităţile care fac obiectul unui sistem de conducere şi control comportă două tipuri de situaţii, după cum sistemul este sau nu capabil

să prelucreze întreaga informaţie care i se furnizează. În primul caz avem o problemă exactă, în cel de-al doilea una inexactă. Însă o aceeaşi sarcină de conducere şi control poate conduce la o problemă exactă sau la una inexactă, în funcţie de posibilităţile sistemului considerat. Elaborarea unui program de calculator pentru jocul de şah constituie o problemă inexactă, dar ar putea deveni o problemă exactă într-un stadiu mai avansat de dezvoltare a calculatoarelor şi a teoriei programării.

Putem formula problema şi altfel. În activitatea algoritmică a unui sistem de conducere şi control distingem doi parametri: numărul variantelor analizate şi adâncimea de analiză. Este clar că o creştere a unuia dintre aceşti doi parametri ne obligă la o micşorare a celuilalt parametru. Avem astfel două strategii şahiste, după cum decidem să analizăm un număr mai mare, eventual cel mai mare posibil, de variante de mutări, însă admiţând o adâncime relativ redusă de analiză (cu alte cuvinte, arborele variantelor va avea un număr foarte mare, eventual maxim, de ramuri, toate ramurile având aceeaşi lungime, relativ redusă) sau un număr relativ mai mic de variante, însă cu o adâncime mai mare decât în prima strategie. Shannon şi-a dat seama că cea de a doua strategie este mai bună. Într-adevăr, printre diferitele variante de mutări care se înfăţişează unui jucător există multe care se exclud aproape instantaneu prin neoportunitatea lor; ce rost ar avea să încărcăm un program de calculator cu analiza detaliată a unor mutări de acest fel? În schimb, fiind foarte selectivi cu variantele pe care le reţinem, avem posibilitatea să desfăşurăm analiza lor până la o adâncime mult mai mare.

Se ştie că investigaţia lui Shannon a fost continuată, între alţii, şi de Mihai Botvinnik (op.cit.), iar apoi au urmat, până în zilele noastre, numeroase alte cercetări. La o teorie matematică a jocului de şah încă nu s-a ajuns, nu avem încă pentru şah o carte de tipul aceleia pe care marele matematician francez Emile Borel a scris-o pentru bridge sau o carte de tipul celor existente pentru jocul GO. Natura preponderent probabilistă a jocului de bridge este evidentă, după cum este clară natura combinatorial-topologică a jocului GO. Dar şahul în ce încrengătură a

matematicii s-ar situa? Faptul că fondatorul teoriei matematice a informației, Claude Shannon, s-a ocupat cel dintâi de programarea șahului la calculator ne dă de bănuit că în șah aspectele informaționale au un rol important. Entropiile informaționale de diverse ranguri (a se vedea, pentru această chestiune, capitolul al VIII-lea din lucrarea noastră în colaborare *Introducere în lingvistica matematică*, Editura Științifică, 1966) ne-ar putea ajuta să distingem mai riguros între valoarea intrinsecă a unei piese și valoarea ei poziționlă (aceasta din urmă corespunzând unei entropii de ordin superior). Poate că și *energia informațională Onicescu* (a se vedea, pentru o prezentare elementară, capitolul al VI-lea din lucrarea noastră *Poetica matematică*, Editura Academiei, 1970) ar fi relevantă aici. Teoria matematică a jocurilor și teoria matematică a deciziei nu pot fi ignorate de nici un cercetător al strategiei șahiste, deoarece în șah jucătorii trebuie să ia, alternativ, decizii în vederea cărora elaborează strategii. Nu mai puțin important este aspectul combinatorial, care dă posibilitatea să se reprezinte structura diferitelor noi configurații ulterioare posibile. La fel de important este aspectul logic.

Șahul ca sistem formal

În orice moment al desfășurării unei partide de șah, configurația pieselor împreună cu regulile care guvernează folosirea lor corespund unui adevărat sistem formal, în sensul logicii matematice. Să amintim, după David Hilbert, definiția noțiunii de sistem formal. Se consideră mai întâi o mulțime finită V numită *vocabular*. Elementele din V sunt *cuvinte*. Fie un *limbaj* L pe V, adică o colecție (finită sau infinită) de șiruri finite de cuvinte. Un șir de acest fel constituie *o frază* și are forma $a_1\ a_2 \ldots .\ a_n$, unde fiecare termen a_i (i variabil de la 1 la n) este un cuvânt, iar n se numește lungimea frazei. Despărțim pe L în două părți L_1 și L_2 fără fraze comune. Frazele din L_1 se numesc *termeni*, iar cele din L_2 se numesc *relații*. În L_2 distingem o anumită parte formată din *teoreme*. De obicei, teoremele unui sistem formal sunt introduse cu

ajutorul a două noţiuni auxiliare: noţiunea de *axiomă* şi noţiunea de *text demonstrativ*. Axiomele sunt cazuri particulare de relaţii, deci ele alcătuiesc o mulţime A conţinută în L_2. Un text demonstrativ este definit de un şir de relaţii (adică de fraze din L_2),astfel încât orice relaţie din şir este o axiomă, sau poate fi dedusă din relaţiile precedente din şir, prin folosirea unui sistem K determinat de *reguli*. O teoremă poate fi definită ca o relaţie conţinută într-un text demonstrativ.

Să încercăm să vedem cum s-ar încadra şahul în ideea de sistem formal. O teoremă ar fi orice configuraţie posibilă a pieselor pe tabla de şah; cu alte cuvinte, este o teoremă orice configuraţie la care se poate ajunge, cel puţin în principiu, prin plecarea din poziţia iniţială prevăzută de regulamentul jocului de şah şi printr-o desfăşurare a jocului conformă cu regulile jocului. Unica axiomă ar fi configuraţia iniţială a pieselor. Şirul de configuraţii prin care se trece de la configuraţia iniţială, adică de la axiomă, la configuraţia existentă la un anumit moment pe tabla de şah, într-o desfăşurare regulamentară a jocului, constituie un text demonstrativ. Este deci clar că, prin convenţiile adoptate, teoremele şahului sunt configuraţiile care pot fi inserate în texte demonstrative.

Sistemul K de reguli este constituit, în cazul şahului, de regulile de folosire a celor şase tipuri de piese. Să observăm aici că o piesă de şah este definită *exclusiv* prin regimul ei sintactic şi prin poziţia ei iniţială. De exemplu, piesa numită *nebun* este complet definită de faptul că se află iniţial pe una dintre poziţiile C_1, F_1 (nebunii albi), C_8, F_8 (nebunii negri) şi se poate deplasa în diagonală în toate direcţiile şi pe orice distanţă liberă, putând ataca şi înlătura din joc prima piesă de culoare diferită întâlnită pe parcurs, prin ocuparea poziţiei respective. Faptul că piesa *nebun* are o anumită formă şi mărime este neesenţial, servind numai la identificarea şi recunoaşterea ei imediată. Nimic nu s-ar schimba în jocul de şah dacă am conveni ca pionii să aibă forma şi mărimea pe care le aveau până acum nebunii şi, invers, nebunii să fie material reprezentanţi de piese având forma şi mărimea pe care le aveau până acum pionii. Ar fi poate o oarecare dificultate psihologică

de adaptare la noua convenţie, dar depăşirea ei ar constitui numai o chestiune de timp. Nici culorile alb şi negru nu sunt esenţiale. Am putea folosi în locul lor galben şi albastru sau portocaliu şi verde.

Mai mult, am putea renunţa la distincţia pe bază de culoare dintre piesele celor doi parteneri, folosind o distincţie de alt tip, exprimată prin orice trăsătură pe care piesele unuia dintre parteneri ar avea-o, iar ale celuilalt nu.

Este gândirea şahistă secvenţială sau bidimensională?

Ajungem la o chestiune delicată privind structura unui sistem formal. Am văzut că teoremele sunt cazuri particulare de relaţii, care, la rândul lor, sunt fraze pe un vocabular finit. Cum asigurăm acest caracter secvenţial, liniar, al teoremelor, în condiţiile în care, după cum se ştie, configuraţiile pe care le obţinem pe tabla de şah sunt bidimensionale? Există două căi de depăşire a acestei dificultăţi. O cale ar consta într-o modificare a definiţiei unui sistem formal, care să permită transgresarea restricţiei de secvenţialitate. În matematica modernă există sisteme formale de acest tip mai general, un exemplu în acest sens fiind *gramaticile picturale* (despre care cititorul român poate afla unele lucruri din volumul colectiv pe care l-am coordonat la Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică în 1982, *Semiotica matematică a artelor vizuale*). O tentativă în acest sens, în ceea ce priveşte şahul, ar fi necesară. Există însă şi o altă cale, care se situează în cadrul liniar, secvenţial, al sistemelor formale clasice, aşa cum au fost ele concepute de Hilbert în deceniul al treilea al secolului trecut. Într-adevăr, deşi configuraţiile de piese pe tabla de şah sunt bidimensionale, jocul de şah ca atare are o desfăşurare secvenţială, care poate fi descrisă şi înregistrată sub formă liniară, cum se şi întâmplă când relatăm în scris o partidă de şah. Este necesară o anumită precauţie în alegerea vocabularului. Nu este greu de văzut că orice mutare în şah poate fi descrisă secvenţial cu ajutorul unui vocabular format din opt elemente, asociate cu deplasări în cele opt poziţii posibile în jurul unei anumite *poziţii*; a = în

față, b = la stânga sus, c = la stânga mijloc, d = la stânga jos, e = în spate, f = la dreapta jos, g = la dreapta mijloc, h = la dreapta sus. Mai este nevoie să suplimentăm vocabularul cu elemente care fixează pozițiile inițiale și pozițiile ulterior posibile (în limitele celor 64 de pătrate albe și negre). Dacă, de exemplu, poziția inițială D_2 a unui pion alb ar fi exprimată prin litera *m*, atunci mutarea sa în D_4 ar fi exprimată prin *maa*.

Nu insistăm aici într-o direcție care ne-ar duce la prea multe complicații tehnice. Să observăm numai că sistemul formal schițat mai sus înregistrează numai ceea ce este permis în jocul de șah, neaducând nici o indicație în ceea ce privește găsirea unei strategii de câștig. Dar înțelegerea riguroasă a permisiunii ne ajută la înțelegerea posibilităților de câștig. Alte instrumente și viziuni matematice intră acum în scenă.

O observație finală se impune. Caracterul calculator, analitic-deductiv, al șahului este diminuat de restricțiile de durată impuse de regulamentul jocului de șah. Aceste restricții îi obligă pe jucători să suplinească, în anumite momente, analiza unei situații printr-o percepție intuitiv-holistică. Poate însă că ar trebui să distingem și la șah, așa cum se face în studiul altor acțiuni umane, între competență și performanță. Competența șahistă este dată exclusiv de ansamblul regulilor de folosire a pieselor. Tot ceea ce se adaugă la aceste reguli, circumstanțele exterioare de desfășurare, specificul de loc și moment țin de performanța (în sens psihologic, nu competițional) șahistă. Desigur, și competența șahistă își are istoria ei, dar modificările sala au fost incomparabil mai lente.

Limbă și șah

Faptul că pentru lămurirea structurii de limbaj autori dintre cei mai importanți, ca Ferdinand de Saussure și L.Wittgenstein, au simțit nevoia să recurgă la analogia cu jocul de șah, are o semnificație deosebită, care nu putea să nu rețină atenția cercetătorilor. Un prestigios lingvist contemporan, Joseph Greenberg (*Is language like a chess game?* în volumul

Language, Culture and Communication, editat de A.S.Dil, 1971, p.330-352, la editura Stanford University Press) a supus unui examen amănunţit analogiile propuse de F. de Saussure, constatând că ele rezistă tuturor testelor constituite de dezvoltarea contemporană a lingvisticii, în cei peste 50 de ani care-l despărţeau de data publicării Cursului de Lingvistică Generală al celebrului lingvist genovez. Şahul este exemplul ideal prin care explicăm esenţa unor opoziţii fundamentale în lingvistică, de tipul sincronie-diacronie sau limbă-vorbire. Nu este vorba aici numai de faptul de a explica un lucru mai complicat prin unul mai simplu, ci şi de încă cel puţin două aspecte esenţiale. Limbajul, în ciuda componentei sale ludice, este dominat de necesitate şi finalitate, în timp ce şahul se înscrie în întregime sub semnul ludicului; apoi, în bună măsură, ca o consecinţă a situaţiei pe care tocmai am semnalat-o, regulile şahului sunt explicite, în timp ce regulile limbii sunt, în cea mai mare parte, implicite, operaţia de identificare a lor fiind anevoioasă şi cu rezultate care variază în timp şi spaţiu.

Este însă legitim să ne întrebăm dacă rolul şahului nu poate fi preluat, în cele de mai sus, de orice alt joc. Nu este greu de văzut că, în raport cu alte jocuri foarte răspândite, şahul oferă: avantajul varietăţii pieselor sale, în consonanţă cu varietatea elementelor lingvistice; avantajul gradului relativ sofisticat al regulilor care guvernează mişcarea pieselor şi al caracterului lipsit de orice ambiguitate al acestor reguli. Astfel, jocuri ca *go* sau *table* prezintă piese sub forma unui alfabet format dintr-un singur element. Şahul prezintă o dublă varietate, de ordin material şi structural, întocmai ca şi limba.

Interesul pentru analogia limbă-şah a crescut în ultimele decenii, datorită faptului că structuri de tipul celor lingvistice au fost identificate şi în alte domenii, cum ar fi etnologia (Claude Lévi-Strauss), psihanaliza (J. Lacan), genetica (Roman Jakobson) şi multe altele. A apărut astfel posibilitatea de a extinde considerabil câmpul de manifestare al metaforei şahiste. În acelaşi timp, aceste tentative au condus la o reconsiderare mai riguroasă a însăşi structurii jocului de şah. Acest joc a cunoscut, de-a lungul vremii, numeroase variante, aşa cum rezultă

din lucrarea lui Harold J. Murray (*A History of Chess*, Clarendon Press, Oxford, 1913) sau din lucrarea lui John Gollon (*Chess Variations: Ancient, Regional and Modern*, E. Tittle, Rutland, Vt., 1968). Aflăm astfel că au existat 27 de variante ale jocului de şah, fapt care ne sugerează o modalitate simplă de identificare a structurii de bază a acestui joc: identificarea elementelor comune celor 27 de variante.

Orizontal-vertical şi diagonal

Să începem cu configuraţia tablei de şah. Dintre cele 27 de variante, numai şase prezintă configuraţia 8 x 8. Însă la aproape toate variantele tabla de joc este dreptunghiulară (nu neapărat pătrată) şi prezintă două familii de drepte paralele, cele dintr-o familie fiind perpendiculare celor din cealaltă familie. Excepţie de la această structură fac şahul bizantin, jucat pe o suprafaţă rotundă, şi o variantă a şahului chinezesc, la care suprafaţa de joc este hexagonală.

În cele mai bune variante bazate pe intersecţii de drepte echidistante, piesele ocupă pătratele formate de dreptele respective, în aşa fel încât fiecare dintre pătrate este accesibil cel puţin unei piese. (Există jocuri care se desfăşoară pe o suprafaţă de tipul aceleia de la şah, dar în care jumătate dintre pătrate nu sunt accesibile nici unei piese. Într-o variantă chinezească, suprafaţa de joc este în formă stelată, cu intersecţii formând unghiuri de câte 45 de grade. Piesele ocupă chiar punctele de intersecţie). O atare structură impune o serie de restricţii de la care nu se va sustrage nici un joc care i se supune. Într-adevăr, orice mutare a unei piese dintr-un loc în altul vecin trebuie, în condiţiile date, să fie sau perpendiculară (pe una dintre laturile suprafeţei dreptunghiulare de joc) sau în diagonală (formând un unghi de 45 de grade cu baza).

Faţă de opoziţia perpendicular-diagonal, este natural să se creeze câte o piesă pentru fiecare dintre cele două posibilităţi. După cum se ştie, aceste piese sunt turnul şi nebunul. Există aceste piese în toate variantele jocului de şah (cu excepţia celor menţionate)? Pentru a răspunde la această întrebare trebuie mai întâi să precizăm în ce

condiţii două variante ale jocului de şah sunt efectiv distincte; aceasta se întâmplă atunci când în fiecare dintre cele două variante există o piesă ale cărei mişcări sunt diferite de ale oricărei piese din cealaltă variantă. Aplicând acest criteriu, cele 27 de variante iniţiale se reduc la 20. În fiecare dintre aceste 20 de variante esenţiale există o piesă echivalentă cu turnul modern, în sensul că se poate deplasa numai orizontal sau vertical. Tot aşa, în fiecare dintre cele 20 de variante există o piesă dedicată exclusiv deplasărilor în diagonală. Dincolo însă de aceste fapte, apar deosebiri de detaliu. Astfel, într-o variantă europeană medievală, în una islamică şi într-una japoneză, piesa dedicată deplasărilor orizontale sau verticale se poate muta numai într-un pătrat vecin, orizontal sau vertical. Într-o variantă islamică, această piesă nu se poate muta mai mult de două pătrate, pe orizontală sau pe verticală, iar într-o variantă spaniolă medievală ea nu se poate muta decât pe distanţa a trei pătrate; orizontal sau vertical. În ceea ce priveşte piesele care se deplasează exclusiv în diagonală, este interesant faptul că numai în opt variante există o piesă echivalentă cu nebunul modern.

Transgresarea opoziţiei perpendicular-diagonal

Orice opoziţie este până la urmă transgresată. Era firesc să fie transgresată şi opoziţia perpendicular-diagonal. Cum? Prin crearea unor piese care mediază între cei doi termeni, fiind orientate în aceeaşi măsură spre mişcări perpendiculare, ca şi spre mişcări în diagonală. După cum se ştie, în şahul modern aceste piese sunt regele şi regina; însă în timp ce regele realizează dezideratul formulat la modul minimal, regina îl realizează la modul maximal. Care este, din acest punct de vedere, situaţia calului? În cărţile de şah pentru începători publicate la noi, mişcările calului sunt descrise cu ajutorul literei L: două pătrate orizontal sau vertical, urmate de un pătrat pe direcţia perpendiculară primeia. Să observăm însă că o descriere perfect echivalentă este aceea care prevede pentru cal o mutare constând în deplasarea cu un pătrat pe orizontală sau verticală, urmată de deplasarea, tot cu un pătrat,

înainte, pe diagonală. Apare astfel echilibrul pe care calul îl realizează, în felul său specific, între orientarea pe perpendiculară şi orientarea pe diagonală, deci, din acest punct de vedere, calul intră în aceeaşi categorie ca şi regele şi regina. Deosebirea dintre cal, pe de o parte, rege şi regină, pe de altă parte, constă în faptul că, în timp ce calul realizează concomitent (deci printr-o singură mutare) echilibrul dintre perpendicular şi diagonal, regele şi regina realizează acest echilibru în mod *alternativ*. Folosind terminologia lingvisticii moderne, am putea spune că perpendicularul şi diagonalul se află în relaţie *sintagmatică* în cazul calului şi în relaţie *paradigmatică* în cazul regelui şi reginei. Dar poate că mai adecvat putem exprima distincţia dintre cal, pe de o parte, şi rege şi regină, pe de altă parte, referindu-ne la faptul că la cal echilibrul menţionat se realizează *individual*, prin fiecare mişcare, în timp ce la rege şi regină acest echilibru se realizează numai *global*, prin ansamblul mişcărilor posibile. Dar acest echilibru global este numai de natură potenţială, ceea ce se actualizează pe tabla de joc poate constitui o derogare de la echilibrul menţionat. Ar fi interesant de urmărit acest aspect al pragmaticii şahiste.

Cum se prezintă lucrurile în variantele mai vechi ale şahului? Este interesant faptul că în şase dintre aceste variante regelui i se permite, la prima sa mutare, comportamentul unui cal, în timp ce în nici o variantă nu i se permite comportamentul unei piese alta decât calul. Apropierea structurală dintre cal şi rege este deci recunoscută.

Calul – o problemă de finețe

Urmează acum o problemă de finețe. „Neutralitatea“ calului în raport cu cele două posibile orientări, perpendiculară şi în diagonală, ar pretinde să nu existe o ordine preferenţială în succesiunea acestor două orientări, cu alte cuvinte, dacă admitem ordinea: deplasare cu un pătrat pe perpendiculară, urmată de o deplasare cu un pătrat pe diagonală, atunci trebuie să admitem şi ordinea inversă: deplasare cu un pătrat pe diagonală, urmată de o deplasare cu un pătrat pe perpendiculară.

Numai în acest fel calul realizează într-adevăr o mediere „nepărtinitoare" între cele două orientări. Nu este însă greu de văzut că acest deziderat poate fi realizat numai dacă permitem calului să treacă peste pătratele ocupate de alte piese. Tocmai acest privilegiu explică denumirea de cal; este vorba de o piesă care sare peste orice fel de pătrate, libere sau ocupate. Nu mai puţin de 17 variante ale şahului conţin câte o piesă de tipul calului modern. În timp ce una dintre variante recurge la o piesă care cumulează mişcările calului şi reginei din şahul modern. Michael P. Caroll (*A structuralist look of chess*, Semiotica, vol.31 1980, no 3-4, p.273-287), care ne ghidează în itinerarul de faţă, reprezintă mişcarea calului ca o structură diacronică a perpendicularităţii şi diagonalei, opusă structurii sincronice a aceloraşi elemente, la rege şi regină. Însă structura sincronică este aici iluzorie, deoarece nici regele, nici regina nu realizează concomitent cele două tipuri de orientări; în ambele cazuri, este vorba de o structură diacronică, realizată însă la niveluri diferite: la nivelul fiecărei mutări în parte, în cazul calului; la nivelul ansamblului mutărilor, în cazul regelui şi reginei.

Pionii – un compromis între turn şi regină

Este natural acum să ne întrebăm dacă nu se poate realiza o a doua mediere, între piesele cu mişcări perpendiculare şi piesele din prima mediere sau între piesele cu mişcări în diagonală şi cele din prima mediere. Această mediere de ordinul al doilea ar putea fi realizată cu piese care fie că, în general, se deplasează orizontal sau vertical, dar posedă şi o capacitate limitată de deplasare în diagonală, fie că, în general, se deplasează în diagonală, dar dispun şi de o oarecare posibilitate de deplasare orizontală sau verticală. Prima situaţie este, evident, realizată de pionii şahului modern, care se deplasează în general pe verticală, dar nu pot captura o piesă adversă decât mişcându-se în diagonală. Dintre cele 20 de variante de şah, 18 posedă o piesă de tipul pionului. Dar chiar cele două variante în care nu există o atare piesă au o piesă oarecum asemănătoare pionului. Astfel, în varianta japoneză

Shogi există o piesă echivalentă turnului modern, care, dacă reuşeşte să ajungă în teritoriul advers (ultimele trei rânduri opuse), capătă dreptul suplimentar de a se deplasa câte un pătrat, în diagonală, în orice direcţie.

Ce se întâmplă însă cu posibilitatea unui compromis între mişcarea în diagonală şi cea din prima mediere? Şahul modern nu o mai cunoaşte, dar ea a existat în unele variante mai vechi. Astfel, în varianta japoneză Shogi există o piesă de tipul nebunului modern, care, în plus, se poate deplasa şi vertical sau orizontal, dar numai câte un pătrat; într-o altă variantă veche, există aşa-numitul elefant, care se poate deplasa câte un pătrat, în diagonală, în oricare dintre cele patru direcţii sau un pătrat înainte.

O tentativă de axiomatizare

Să încercăm acum să sintetizăm discuţia de mai sus. Regulile jocului de şah se înfăţişează sub forma unui sistem axiomatic. Admitem trei axiome iniţiale, privind structura suprafeţei de joc şi relaţia ei cu piesele de joc. *Axioma 1:* Suprafaţa de joc constă într-o familie de pătrate obţinute prin două familii de drepte paralele, fiecare dreaptă din prima familie fiind perpendiculară fiecărei drepte din a doua familie. *Axioma 2:* Piesele de joc ocupă şi se deplasează în pătratele introduse prin *Axioma 1. Axioma 3:* Fiecare pătrat de pe suprafaţa de joc este accesibil cel puţin unei piese. Acest sistem de axiome pune în evidenţă două orientări privilegiate, în ceea ce priveşte direcţia de mişcare: orientarea perpendiculară (orizontală sau verticală) şi orientarea în diagonală. Piesele şi regulile de joc sunt, în mare măsură, consecinţa firească a acestor două orientări fundamentale. O primă categorie de piese li se asociază în mod exclusiv; piesele de ordinul întâi sunt cele cu mişcări exclusiv perpendiculare şi cele cu mişcări exclusiv în diagonală. Considerente de simetrie conduc la alegerea a câte două piese de fiecare dintre aceste două tipuri, deci două turnuri şi doi nebuni. O a doua categorie de piese realizează un echilibru între perpendicular şi diagonal. Aceste piese de al doilea ordin sunt la rândul lor de două

tipuri, după cum echilibrul menţionat se realizează de fiecare mutare în parte sau numai global, de ansamblul potenţial al deplasărilor piesei considerate. Primul tip este reprezentat de cai (din considerente de simetrie, în număr de doi); al doilea tip este, la rândul său, de două subtipuri, după cum posibilitatea deplasării perpendiculare sau în diagonală este minimală, fiind redusă la un singur pătrat (regele din şahul modern) sau maximală, limitată doar de dimensiunile suprafeţei de joc (regina din şahul modern). Deoarece primul tip este reprezentat de două piese, tot două piese vor fi afectate şi celui de al doilea tip, deci câte o piesă de fiecare subtip (deci un rege şi o regină). Totalizăm astfel opt piese, număr care sugerează dimensiunea de 8 x 8 a suprafeţei de joc. O a treia categorie de piese se referă la un echilibru; un compromis între piesele de prima categorie şi cele de a doua categorie. Piesele de al treilea ordin astfel obţinute sunt, la rândul lor, de două feluri, după cum prima categorie este reprezentată prin turnuri (perpendicularitate) sau prin nebuni (diagonală), dar numai primul fel (pionii) este reprezentat în şahul modern. Numărul pionilor este sugerat de dimensiunea 8 x 8, câte un pion în faţa fiecărei piese din prima sau a doua categorie.

Dincolo de logic şi combinatorial

Procedarea de mai sus a căutat să aducă în prim plan aspectul logic şi combinatorial al regulilor jocului de şah, măsura în care aceste reguli se impun aproape de la sine, de îndată ce admitem un minim de premise, dintre cele mai simple. Dar chiar din această prezentare s-a desprins şi ideea că aspectul logic nu poate fi sesizat fără luarea în considerare a aspectului istoric. De asemenea, rămân numeroase aspecte care nu pot fi înţelese şi explicate fără referire la fenomene de ordin psihologic, social şi cultural. De ce sunt pătratele în alb-negru? Care este funcţia psihologică a acestui contrast? De ce ne oprim la piese de a treia categorie (pionii) şi nu procedăm, în continuare, la introducerea unor piese de a patra categorie, care să medieze între categoriile imediat anterioare? Cum se explică dispunerea iniţială a pieselor pe tabla

de joc, inclusiv dimensiunea 8 x 8? Este evident că în aceste alegeri intervin şi considerente de ordin entropic-informaţional, privind capacitatea creierului uman de a prelucra informaţia, gradul de complexitate pe care o putem stăpâni şi controla. Însă aceste restricţii de ordin informaţional care pun frâu tendinţei combinatoriale practic nelimitate nu ştim să fi fost explicitate, în cazul jocului de şah. Într-un moment în care teoria matematică a informaţiei cunoaşte mari progrese, cercetări de acest fel nu se vor putea lăsa mult aşteptate. Mai sunt apoi aspectele legate de denumirile pieselor de şah, denumiri a căror evoluţie pune inerent în discuţie originea jocului de şah. Aspectele combinatoriale, strategice şi psiho-sociologice intră toate în interacţiune. Putem despărţi regulile combinatoriale ale regelui de faptul că prin capturarea regelui advers se obţine victoria?

Gândire matematică şi şah

Un procedeu frecvent în matematică este utilizarea a două enunţuri care, dovedindu-se echivalente într-un anumit cadru, încetează de a fi echivalente într-un alt cadru. S-ar părea că aceasta se întâmplă cu poziţia de deschidere la jocul de şah. Putem defini această poziţie în două feluri: a) poziţia în care se află piesele înainte de a se fi efectuat vreo mutare; b) poziţia în care fiecare piesă se află pe locul iniţial. Datorită posibilităţilor oferite de cal, aceste două definiţii sunt neechivalente. Să introducem acum următoarea modificare în regulamentul jocului de şah: la deschiderea jocului, atât albul cât şi negrul efectuează două mutări consecutive (urmând ca după aceasta să se intre în normal). În aceste condiţii afirmăm că negrul nu are o strategie de câştig, cu alte cuvinte, nu există o strategie care să asigure negrului victoria, independent de modul în care joacă albul.

Subtilitatea acestei probleme este de natură psihologică. Cei mai mulţi nu observă neechivalenţa versiunilor a şi b ale definiţiei poziţiei de deschidere. Imposibilitatea unei strategii de câştig pentru negru se bazează esenţial pe versiunea b. Să presupunem, prin reducere la absurd,

că jucătorul cu piesele negre are o strategie de câştig. Putem arăta că această presupunere conduce la o contradicţie. Într-adevăr, albul poate alege în aşa fel primele două mutări încât ele să se neutralizeze reciproc. Anume, el mută mai întâi un cal, apoi îl readuce în poziţia sa iniţială. În acest fel, negrul se află în situaţia iniţială a albului, deoarece, conform variantei b a definiţiei poziţiei de deschidere, albul se află, şi la mutarea de răspuns faţă de aceea a negrului, tot în poziţia de deschidere, deci poate efectua din nou două mutări consecutive. Rezultă că, dacă negrul ar avea o strategie de câştig, aceeaşi strategie ar avea-o şi albul. Dar negrul şi albul nu pot avea amândoi o strategie de câştig, deoarece aceasta ar contrazice regulamentul jocului de şah. Aşadar, presupunerea că negrul ar avea o strategie de câştig se dovedeşte a fi falsă.

Şahul computaţional

Oricâte deosebiri ar putea fi identificate între şah şi matematică, cert este că numitorul lor comun rămâne foarte important. Să fie oare o simplă întâmplare faptul că al doilea campion mondial de şah, Lasker, a fost un matematician creator al cărui nume s-a înscris în istoria algeberei moderne? Ca şi gândirea matematică, gândirea şahistă este puternic marcată de capacitatea deductivă. Este foarte interesant, din acest punct de vedere, chiar limbajul pe care-l folosesc comentatorii jocului de şah. Ei vorbesc deseori despre puterea de calcul şi explică uneori victoria unui şahist prin puterea sa superioară de calcul faţă de aceea a adversarului. Dar despre ce calcul este vorba aici? Firește, nu de calculul numeric, ci de un calcul logic, de natură combinatorială. Dar tocmai acest calcul logic s-a situat pe primul plan al atenţiei matematicienilor începând cu deceniul al patrulea al secolului trecut. Matematicianul englez A.M.Turing a fondat un calcul pur simbolic, faţă de care calculul numeric tradiţional este un caz particular. Acelaşi calcul cu simboluri de natură nespecificată a apărut şi în alte variante, cum ar fi funcţiile recursive studiate de S.C.Kleene, Kurt Gödel şi alţii, şi algoritmii normali, introduşi de A.A.Markov. Aceste teorii au con-

stituit fundamentele pe care s-a dezvoltat ulterior utilizarea calculatoarelor electronice. Un calculator electronic efectuează calcule logico-simbolice şi numai prin intermediul lor realizează şi calcule numerice. În aceste condiţii, era firesc să se încerce programarea la calculator a jocului de şah. A luat astfel fiinţă şi s-a dezvoltat tot mai mult şahul computaţional, despre care vom vorbi în cele ce urmează.

Şahul la congresele internaţionale de cibernetică

Am în faţă circulara lansată de Organizaţia Mondială de Sisteme Generale şi Cibernetică, în legătură cu cel de al şaptelea congres internaţional al ei, care a avut loc între 9 şi 13 septembrie 1987, la Londra. Lista temelor care au fost dezbătute începe cu Inteligenţa Artificială, specificându-se că sunt incluse aici şi sistemele-expert şi şahul computaţional. Acest fapt este prin el însuşi semnificativ în ceea ce priveşte amploarea pe care au căpătat-o preocupările privind şahul computaţional. Dincolo de interesul manifestat de cercetătorii în domeniul inteligenţei artificiale, există un imens interes popular pentru şahul de calculator. În 1977 a luat fiinţă Asociaţia Internaţională de Şah Computaţional, reprezentând Organizaţia Internaţională de Şah Computaţional aflată în strânsă legătură cu Association of Computing Machinery şi International Federation of Information Processing, cât şi cu Federaţia Internaţională de Şah. Asociaţia Internaţională de Şah Computaţional publică o revistă trimestrială, organizează odată la trei ani un campionat mondial de şah cu calculatorul şi stimulează cercetarea în acest domeniu. Chiar din aceste informaţii sumare se desprinde uşor ideea unei transformări de anvergură care s-a produs prin trecerea de la şahul uman la şahul de calculator. Atâta timp cât şahul nu utiliza nici o „proteză", el nu depăşea statutul său de joc de divertisment. Prin realizarea unor programe care transferă calculatorului o parte tot mai mare a gândirii şahiste, ceea ce era un simplu joc devine şi o problemă de cercetare ştiinţifică, o problemă care nu interesează numai pe

şahişti, ci pe toţi specialiştii în inteligenţa artificală. Şahul computaţional devine un adevărat laborator în care se plămădesc probabil idei care ar putea fertiliza gândirea economică, de planificare, strategia unor activităţi de conducere sau de altă natură.

Două evenimente importante

Interesul tot mai mare pe care pasionaţii şahului îl manifestă faţă de şahul de calculator se explică prin două evenimente care au marcat ultimele decenii: dezvoltarea programelor de şah competitive cu jucători umani de valoare şi producerea şi comercializarea jocurilor portabile de şah computaţional. Acestor „jucării", care nici prea scumpe nu sunt, cu greu le rezistă pasionaţii de nivel mijlociu ai jocului de şah. Prima carte dedicată legăturilor dintre şah şi calculator pare să fie aceea publicată de David Levy (*Chess and Computers*, Computer Science Press, Potomac, Maryland, 1976). Au urmat multe altele, dintre care se detaşează ca importanţă aceea a lui D. Levy şi M. Newborn (*More Chess and Computers*, Computer Science Press, Potomac, Maryland, 1980). Mai important este însă faptul că revistele de inteligenţă artificială, cibernetică, informatică publică tot mai frecvent articole de cercetare, privind şahul computaţional. Prin aceasta, şahul se deschide spre lumea ştiinţei. În istoria culturii este frecventă situaţia în care o preocupare apărută în legătură cu o anumită problemă se dovedeşte ulterior relevantă într-o altă problemă, cu totul diferită. Nu cumva s-ar putea încadra în acest domeniu şi evoluţia şahului? Metamorfoza ludicului în ştiinţă nu ar fi la prima sa manifestare. Să reamintim că teoria probabilităţilor s-a născut din preocuparea pentru jocurile de noroc.

Pariul cu inteligenţa maşinii

Tocmai acesta pare să constituie pariul lui David Levy, despre care am vorbit mai sus. El şi-a propus să câştige interesul specialiştilor în Inteligenţă Artificială şi se pare că a reuşit. Jocul de şah om-calculator

este legat de numele său. Într-o carte a sa, el relatează că în august 1968 participa la o consfătuire de Inteligență Artificală la Universitatea din Edinburgh. La un cocteil, s-a angajat într-o partidă de șah cu John McCarthy, profesor de Inteligență Artificială la Universitatea din Stanford și una dintre autoritățile mondiale în materie. Levy a câștigat partida, dar McCarthy i-a spus (prezis) că în aproximativ zece ani va fi învins de un program de calculator. Levy s-a simțit aproape jignit. Campion de șah al Scoției, în acel moment, el vedea un adevărat afront într-o declarație atât de categorică, făcută de cineva care nici măcar nu era un expert în jocul de șah. Levy i-a propus lui McCarthy un pariu a cărui valoare a crescut până la 1250 de lire englezești, după ce la opinia lui Levy, de neîncredere într-o dezvoltare atât de rapidă a șahului de calculator, se raliaseră câțiva profesori de informatică de renume, ca Donald Michie, Seymour Papert și Ed. Kozdrowicki. Mulți ani, pariul părea pierdut pentru McCarthy. Nu se configura la orizont un program care să poată rivaliza cu un maestru internațional cum era încă atunci David Levy. Însă în 1976 a apărut așa-numitul program Șah 4,5, elaborat de doi cercetători de la Universitatea Northwestern, David Slate și Larry Atkin, un program de șah care, fără a fi invincibil, constituia totuși un progres esențial față de programele anterioare. Levy credea însă că performanțele programului Șah 4,5 erau datorate nu atât calităților propriu-zis șahiste, cât reacțiilor emoționale pe care le determina la oponenții săi umani. Pariul lui Levy cu McCarthy era că, începând cu 1968, timp de zece ani nu va fi învins de nici un program de calculator.

În august 1978, când se apropia termenul pariului, a avut loc la Toronto întâlnirea decisivă a lui Levy cu programul Șah 4,7, un succesor al lui Șah 4,5. Întâlnirea consta din 6 partide. Pentru a câștiga pariul, Levy trebuia să acumuleze măcar trei puncte (adică jumătate din punctele posibile). Întâlnirea a avut o desfășurare dramatică. Prima partidă s-a încheiat cu un rezultat egal, ceea ce constituia deja o performanță, deoarece era prima oară când un program de calculator reușea să facă față unui maestru internațional, însă în următoarele două partide Levy a repurtat victoria. Îl mai despărțea jumătate de punct de

câştigarea pariului; în aceste condiţii Levy a considerat că are un avantaj suficient pentru a-şi permite să experimenteze noi strategii. Dar a eşuat, pierzând partida a patra. În partida a cincea, Levy, prudent, revine la stilul său defensiv anterior şi obţine victoria, câştigând astfel întâlnirea cu 3 1/2 la 1 1/2 şi, totodată, pariul contra lui McCarthy. Acesta din urmă, împreună cu cecul câştigător, îi trimite lui Levy o scrisoare în care îşi exprimă impresia că dacă Levy ar fi pierdut partida cu „forţa brută" a unui program de calculator, el, McCarthy, n-ar fi văzut în aceasta un merit ştiinţific al Inteligenţei Artificiale. Levy a propus un nou pariu, de zece mii de dolari, având ca termen anul 1984, dar a declarat că nu îndrăzneşte să propună un termen mai îndepărtat decât acesta. Fundaţia Fredkin a oferit un premiu de 100.000 de dolari primului program de calculator care va învinge pe campionul lumii la şah.

Prima strategie a lui Shannon

Nu este lipsit de interes să urmărim strategiile care se află la baza şahului computaţional. Creatorul teoriei informaţiei, Claude Shannon (*Programming a computer to play chess*, Philosophy Magazine, seria 7, vol. 41, 1950, p. 250-275), a identificat trei posibile strategii de construire a unui program de calculator pentru jocul de şah. Prima strategie constă în căutarea tuturor mişcărilor posibile, până la o adâncime prestabilită, şi evaluarea poziţiilor rezultante. A doua strategie elimină din arborele de mişcări pe acelea care intuitiv apar a nu merita să fie luate în considerare. A treia strategie este orientată asupra obiectivului urmărit, dar Shannon nu dă indicaţii în această privinţă. Cele mai multe programe de şah, printre care şi programul Şah 4,7, contra căruia Levy a obţinut victoria, adoptă prima strategie. Aceste programe combină două procedee, pentru a decide mişcarea aleasă. Primul procedeu este o căutare de tipul „minimax" în arborele tuturor şirurilor de mişcări posibile până la o anumită adâncime. Al doilea procedeu constă într-o evaluare statică a întregii situaţii de pe tabla de şah. Necesitatea de a opri analiza la o adâncime prestabilită este determinată de faptul că

arborele tuturor alegerilor posibile este, la şah, considerabil mai mare decât numărul electronilor din univers. În programul Şah 4,7 se examinează uneori un milion şi jumătate de poziţii terminale, înainte de a se alege o mişcare. Adâncimea până la care se analizează situaţia este egală cu 8 în faza de mijloc a unei partide şi cu 12 în faza finală, când numărul de ramificaţii ale arborelui de căutare este mai mic.

Evaluarea statică preconizată mai sus acordă de multe ori o pondere principală avantajului material (cine are pe tabla de joc piese mai multe şi mai bune). Se consideră însă şi mobilitatea pieselor, organizarea pionilor şi controlul pătratelor de pe tabla de joc. Funcţia de evaluare statică trebuie apreciată rapid, deci e bine să fie exprimată cât mai simplu, de exemplu printr-un număr care estimează cât de favorabilă este o anumită poziţie particulară.

Performanţe computaţionale în jocul de mijloc

În ceea ce priveşte cea de a doua strategie, care nu ia în considerare toate mişcările posibile în fiecare poziţie, ci selectează unele mutări „mai bune", urmărindu-le în consecinţele lor, ea poate fi programată pe calculator, însă nu a fost încă testată cu succes, datorită timpului necesar pentru selectarea mutărilor şi riscului reprezentat de omiterea unei mutări aparent neinteresante, dar de fapt promiţătoare. Într-o variantă ulterioară cum ar fi Şah 4,9, programul de calculator poate examina milioane de poziţii, pentru a decide care piesă să fie jucată.

Cercetările de psihologia şahului au arătat că chiar marii maeştri internaţionali iau în considerare nu mai mult de circa o sută de poziţii la fiecare mutare. Un mare şahist intuieşte selecţia preconizată de calculator. Nici cea de a treia strategie discutată de Shannon nu a putut fi (încă) valorificată computaţional. Un mare maestru se comportă ca şi cum, după ce a ajuns la modul terminal al consecinţelor unei mişcări, experienţa itinerarului respectiv este comunicată tuturor căutărilor ulterioare; tocmai o atare abilitate nu a putut încă să fie încorporată maşinii, printr-un algoritm adecvat. Din acest punct de vedere, până în 1981 performanţa algoritmică maximă era aceea a programului

PARADISE al lui David Wilken; denumirea programului este o prescurtare a lui Pattern Reeognition Applied to Directing Search (Using patterns and plans in chess, Artificial Intelligence, I4, p. 165-203). Un fapt remarcabil în acest nou program îl constituie rezolvarea, în proporţie de 97%, a dificultăţilor de reprezentare algoritmică a strategiei şi tacticii de mijloc la şah (aşa cum au fost ele prezentate de F. Reinfeld în *Win a Chess*, Dover Books, New York, 1958), prin reducerea la câteva zeci de variante a sutelor sau miilor de poziţii care trebuiau altfel inspectate. Se ştie că teoria şahistă, foarte elaborată în materie de deschideri şi finaluri, este mai puţin dezvoltată în ceea ce priveşte jocul de mijloc. Este de aşteptat ca dezvoltarea şahului computaţional să fie din ce în ce mai profitabilă pentru teoria generală a şahului.

Când va deveni calculatorul un mare maestru?

În cartea sa cu Newborn, Levy este încă circumspect în ceea ce priveşte această problemă. Atâta vreme cât Inteligenţa Artificală nu va realiza un progres uriaş, în simularea algoritmică a procesului de formare a conceptelor, va fi imposibil pentru un program de şah măcar să-l înţeleagă, dacă nu să-l învingă pe Fischer, crede Levy. Ne aflăm într-un moment în care (este vorba de anul 1980), rulând pe cele mai rapide calculatoare, cel mai bun program de şah rămâne totuşi în urma subtilităţilor unui campion mondial. Însă Robert E. Filman (*Computers and Chess*, The Mathematical Intelligencer, vol. 3, 1981, nr. 2, p. 71-75) este de părere că Levy manifestă o anumită lipsă de înţelegere. Poate că niciodată un calculator nu va avea abilitatea de dezvoltare conceptuală necesară pentru a juca la nivelul lui Fischer. Dar atunci, nici Levy nu o va avea. Levy pare a spune: „dacă un calculator poate face asta, atunci asta nu mai e inteligenţă". De îndată ce un lucru devine programabil, el nu ne mai impresionează. Există o teoremă glumeaţă a lui Tessler, după care Inteligenţa Artificială este tot ceea ce încă nu s-a realizat. Simplul fapt că tehnicile brute de explorare conferă maşinii o abilitate şahistă superioară marii majorităţi a oamenilor care joacă şah nu este o realizare considerabilă?

Un alt cercetător în domeniul şahului computaţional, Hans Berliner

(*A Chronology of Computer Chess and its Literature*, Artificial Intelligence, 10, 1978, p. 201-214), fost campion mondial al șahului prin corespondență, exprimă părerea după care șahul n-ar fi atât un joc conceptual, cât unul de căutare exhaustivă. Polemica este în curs de desfășurare.

În legătură cu ideea exprimată mai sus, conform căreia șahul computațional poate contribui la dezvoltarea teoriei șahiste, să menționăm o inovație în deschidere datorată programului Șah 4,6. Se mai semnalează unele idei privind ameliorări ale regulilor de joc. În șah, dacă o aceeași poziție se repetă de trei ori, se declară remiză. Programatorii, capabili să distingă piesele pe cale nesemantică, și-au pus problema: dacă cele două turnuri și-au schimbat locurile în mod repetat, este vorba de o remiză? O altă problemă: dacă nici un pion nu avansează și, după 50 de mișcări, nici o piesă nu este capturată, este permis să se ceară remiză? Programele de calculator au pus în discuție legitimitatea numărului 50 care apare aici.

Șahul și Inteligența Artificială se provoacă reciproc! Istoria schițată mai sus este departe de a fi la zi, iar urmărirea ei va fi profitabilă și ludic, și cognitiv.

Deocamdată, știm că în anii ultimului deceniu al secolului al XX-lea, un program de calculator l-a putut învinge pe campionul mondial la șah. În momentul în care șahul competițional este în situația de a dobândi întâietatea, întregul sistem competițional în șah se află sub semnul întrebării. Vom relata, în cele ce urmează, episodul care a surprins atât lumea șahistă cât și lumea cercetătorilor în domeniul Inteligenței Artificiale.

Ziua de duminică 11 mai 1997

Această zi marchează o dată, atât în istoria științei cât și în istoria jocului de șah. Calculatorul *Deep Blue*, construit în Laboratoarele IBM din Yorktown (USA), a învins, într-o serie de șase partide, pe campionul lumii la șah, Gari Kasparov. Acest eveniment istoric s-a desfășurat sub auspiciile ACM (Association of Computing Machinery) și ale ICCA (International Computer Chess Association) și constituie un

deosebit succes al Inteligenţei Artificiale. Printre cei care l-au pregătit, direct, dar mai cu seamă indirect, îi vom menţiona pe K. von Janisch: *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs* (1863); Ernst Zermelo: *An application of set theory to the theory of chess*, Proceedings of the 5th International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912; Claude Shannon: *Programming a computer for playing chess*, Philosophical Magazine 41 (1950), 256-275; A.M. Turing: *Digital computers applied to games* in B. Bowden (ed.) Faster than Thought: a Symposium on Digital Computing Machines. New York: Pitman, 1953; L. Larson: *A theorem about primes proved on a chessboard*, Mathematical Magazine 50: 2 (1977), 69-74; M. Curzio: *Le jeu d'échecs et les mathématiques*, Archimede, Le Mounier, 78:1 (1981), 1-13; J. Gik: *Schach + Mathematik*. Mir, Moscova, 1986; G. Atkinson: *Chess and Machine*. Abdex, 1993, la care trebuie să adăugăm şi unele dintre referinţele anterioare.

În acelaşi an 1997, în care s-a produs evenimentul discutat aici, apare în Anglia cartea lui M. Petkovic, *Mathematics and Chess*, Dover, 1997. În directă legătură cu evenimentul în cauză este articolul lui F. Hsu: *The chips of Deep Blue*, IEEE, March=April, 1999. Un articol edificator pentru întreaga problemă a legăturii dintre şah şi matematică este cel al lui Paolo Ciancarini: *Gli sgacchi e i matematici*, Bolietino del Unione Matematica Italiana, Agosto 1999, Serie VIII, vol. II-A, no, 203-236, din care am selectat unele dintre informaţiile de mai sus.

Şahul a intrat în viaţa noastră de fiecare zi, de cele mai multe ori fără să ne dăm seama. Avem în vedere proliferarea metaforelor şahiste. Un poet din Oneşti, Alexandru Dumitru, a publicat un volum de poezii cu titlul *Şah la metaforă* (Editura Aristarc, Oneşti, 2000). Dar titlul acestui volum este paradoxal, în sensul că se prevalează de o metaforă, aceea a şahului (în sensul de atac la adversar), pentru a ataca chiar procedeul folosit în titlu: metafora. Şahul reproduce, la scară, prin metaforă şi prin metonimie, lumea în care trăim.

CAPITOLUL V
JOCURILE HAZARDULUI

Cum s-a născut teoria probabilităţilor

Jocurile de noroc sunt dintre cele mai populare şi cele mai vechi, cele mai provocatoare şi cele mai riscante jocuri. De un grad mare de atracţie pentru unii, ele pot deveni ruinătoare, transformându-se într-un pericol social. Un cod emis cu o sută de ani înaintea erei noastre cerea unui rege să interzică jocurile de noroc şi rămăşagurile în regatul său, căci viciile acestea pot distruge regate. Ca sursă de probleme însă, aceste jocuri au constituit o adevărată mină de aur, deoarece creează situaţii standard fundamentale în explorarea fenomenelor întâmplătoare. Din studiul unor fenomene de acest fel, s-a născut venerabila ştiinţă care constituie azi unul dintre cele mai importante capitole ale matematicii: teoria probabilităţilor.

Naşterea acestei teorii, în secolul al XVII-lea, se asociază cu numele nobilului Antoine Gombauld, Cavaler de Méré, preocupat de diferite jocuri de aruncare a monedei sau a zarului. Iată un exemplu de problemă de acest fel: un jucător A propune unui alt jucător B pariul (la egalitate) următor: B câştigă dacă din patru aruncări ale zarului apare cel puţin odată faţa cu cifra 6; altfel, B pierde şi câştigă A. Care dintre jucători, A sau B, are şansa mai mare de câştig? O soluţie simplă se obţine procedând indirect, studiind evenimentul contrar celui care ne interesează: care este probabilitatea ca din patru aruncări ale zarului să nu apară niciodată cifra 6? Zarul are şase feţe, deci probabilitatea ca la o anumită aruncare să nu apară cifra 6 este egală cu 5/6. Probabilitatea ca acest lucru să se întâmple de patru ori va fi deci egală cu puterea a patra a lui 5/6. Rezultă că probabilitatea evenimentului opus, care ne interesează, este egală cu $1 - (5/6)^4 + 671/1296$, deci este mai mare decât 1/2, deci jucătorul B are o şansă mai mare de câştig decât jucătorul A.

Există totuşi atestări mai vechi. În în cartea sa *Cardano, the Gambling Scholar*, publicată în 1953, la Princeton University Press, algebristul Oystein Ore arată că italianul Cardano (bine cunoscut în legătură cu rezolvarea ecuaţiilor algebrice de gradul al treilea) a scris încă în secolul al XVI-lea o carte de matematică a jocurilor cu zaruri *Liber de ludo aleae*, dar cartea a fost publicată abia în 1663.

De la Cavalerul de Méré la Pascal şi Fermat

Un alt tip de problemă care s-a aflat în atenţia Cavalerului de Méré se referă la şansa ca din n aruncări succesive a două zaruri să se obţină, cel puţin la o aruncare, un 6-6, cu alte cuvinte cel puţin la o aruncare ambele zaruri să afişeze cifra 6. Evident, când n creşte, creşte şi şansa de a avea un 6-6. Pentru n = 1, şansa este 1/36 (există 36 de moduri în care se pot cupla cifrele de la 1 la 6), deci mult inferioară lui 1/2. Şansa rămâne inferioară lui 1/2 şi pentru valorile imediat următoare ale lui n. Ca şi în cazul precedent, este mai comod să evaluăm mai întâi probabilitatea evenimentului contrar, deci al neapariţiei nici unui 6-6, şi apoi să scădem din 1 valoarea obţinută. Şansa respectivă este 35/36 după prima aruncare a celor două zaruri, $(35/36)^2$ după a doua aruncare, ... $(35/36)^n$ după a n-a aruncare. Rezultă că probabilitatea p (n) a apariţiei unui 6-6 după n aruncări este egală cu $1-(35/36)^n$. Ca şi la problema precedentă, trebuie să stabilim de la ce valoare a lui n devine p(n) mai mare decât 1/2. Şirul $(35/36)^n$ tinde descrescând la zero, deci p (n) tinde crescând la 1. Rezultă existenţa unui valori întregi k astfel încât $p(k) \leq 1/2$, dar p(k+1) 1/2. Calculele arată că avem k = 24, valoare identificată şi de Cavalerul de Méré. Deci jucătorul căruia i se propune acest joc este avantajat de îndată ce numărul de aruncări este mai mare decât 24.

De Méré l-a provocat cu probleme de acest fel pe matematicianul Blaise Pascal, care, la rândul său, l-a antrenat şi pe Pierre Fermat. De fapt, din dialogul acestora s-a născut ceea ce azi numaim teoria probabilităţilor. Imediat s-au contaminat de aceste probleme şi alţi savanţi. Nicolas Bernoulli (1687-1759) este unul dintre cei opt matematicieni cu numele Bernoulli, a căror activitate se extinde pe parcursul unui

secol, de la sfârşitul secolului al XVII-lea până spre sfârşitul secolului al XVIII-lea. Nicolas s-a ocupat de următoarea problemă: A oferă lui B un franc dacă acesta obţine un 6 în prima aruncare a zarului: doi franci dacă obţine un 6 abia la a două aruncare, şi în mod general, îi oferă lui B n franci dacă apare 6 abia la a n-a aruncare a zarului. Probabilitatea p (n) ca 6 să apară abia la a n-a aruncare se obţine multiplicând pe 1/6 cu a (n-1) –a putere a lui 5/6. Aşteptarea matematică a acestui joc (un fel de valoare medie a câştigului) se obţine făcând suma produselor dintre p (n) şi n franci, pentru n mergând de la 1 la infinit. Se obţine o serie a cărei sumă este egală cu 6. Aceasta înseamnă că valoarea medie a câştigului la care se poate aştepta B este de 6 franci.

De la aşteptare la surpriză nu-i decât un pas

Luîndu-se ca model jocul de mai sus, s-a introdus un alt joc, privind aruncarea unei monede, A oferă lui B doi dolari dacă la prima aruncare a monedei apare stema; îi oferă 4 dolari dacă stema apare abia la a doua aruncare; îi oferă 8 (deci a treia putere a lui 2) dolari dacă stema apare abia la a treia aruncare. În general, îi oferă 2^n dolari dacă stema îşi face apariţia abia la a n-a aruncare (n = 1,2,3,...). Care este aşteptarea matematică a acestui joc? Procedând ca şi la jocul anterior, constatăm mai întâi că probabilitatea ca stema să apară abia la a n-a aruncare este egală cu $1/2^n$, deci A ar trebui să-i ofere lui B $(1/2^n)$ 2^n dolari, deci un dolar. Ar rezulta astfel că recompensa nu depinde de n, iar aşteptarea matematică a jocului este infinită (suma unei serii în care toţi termenii sunt egali cu 1). Corectă matematic, această soluţie apare totuşi absurdă. Explicaţia se află în faptul că aici este vorba de modelarea unei situaţii în care sunt implicaţi oameni, iar ipoteza (neexplicită, dar clară) că A are o cantitate infinită de bani nu este realistă. Modelul trebuie refăcut pentru a-l adapta la situaţia în care A dispune de o sumă prealabil fixată.

Plauzibil, dar fals; corect, dar straniu

Ştiind că în primele opt aruncări ale unei monede a ieşit stema, care este probabilitatea p ca la o nouă aruncare să apară tot stema? Răspunsul

plauzibil la prima vedere este: $p < 1/2$. Răspunsul corect: $p = 1/2$. O situaţie asemănătoare apare în următoarea problemă: aruncând două monede, care este şansa să apară cel puţin o stemă? Lui D'Alembert i s-a părut a fi 2/3, pe baza unui „raţionament" de tipul următor: există trei posibilităţi: a) două steme, b) o stemă şi o marcă, c) două mărci. Dintre acestea, două asigură prezenţa unei steme, deci dintre trei cazuri posibile două sunt favorabile. A fost o pripeală din partea eminentului coautor la *Enciclopedia Franceză* (sfârşitul secolului al XVIII-lea), deoarece cele trei cazuri nu sunt egal probabile; cazul b are probabilitatea 1/2, în timp ce a şi c au, fiecare în parte, probabilitatea 1/4. Sunt 4 cazuri, b se desface în două: stemă la prima monedă, marcă la a doua; marcă la prima, stemă la a doua. Dinc cele patru cazuri echiprobabile, trei sunt favorabile, răspunsul corect este deci 3/4.

Galileo Galilei a fost întrebat de ce aruncarea a trei zaruri conduce mai des la suma 10 decât la suma 9. Răspunsul este azi la îndemâna unui elev. Există 6_3, deci 216 posibilităţi de combinare a rezultatelor celor trei zaruri şi ele sunt egal probabile. Dintre acestea 27 conduc la suma 10 şi numai 25 dau suma 9. Cu ajutorul unui calculator, operaţii de acest fel pot fi efectuate azi fără bătaia de cap necesară în astfel de situaţii pe vremea Galilei.

De la Bernoulli la Poincaré

Jacques Bernoulli a propus următoarea problemă, reluată de Christian Huygens (1629-1695): *A* şi *B* au fiecare câte 12 monede jucate în combinaţie cu trei zaruri. Dacă aruncarea zarurilor conduce la suma 11, *A* dă o monedă lui *B*. Dacă suma este 14, *B* dă o monedă lui *A*. Persoana care adună prima toate monedele este declarată câştigătoarea jocului. Huygens a numărat şansele celor doi jucători găsind că *A* câştigă în 244.140.625 de cazuri, în timp ce *B* câştigă în 282.429.536.481 de cazuri. Evident, cazurile se referă la diferite sume posibile între rezultatele a 12 zaruri şi la numărul de cazuri în care această sumă este 11, respectiv 14. Cu posibilităţile de calcul de acum, efortul de calcul este mult mai mic. O generalizare a acestui joc a fost realizată de Jacques Bernoulli.

Vom discuta acum un joc provenind din secolul al XVIII-lea. Trei bilete identice sunt colorate; primul, pe ambele părţi cu roşu; al doilea, cu roşu pe o parte şi cu negru pe cealaltă parte; al treilea, cu negru pe ambele părţi. După ce le-am amestecat, alegem la întâmplare un bilet şi îl punem pe masă, putând deci observa culoarea sa de pe faţa superioară, fie ea culoarea roşie. Care este probabilitatea ca respectivul bilet să fie roşu pe ambele părţi? S-ar părea că este 1/2, deoarece este exclusă posibilitatea negru-negru. *A* propune acest pariu lui *B*, care susţine că probabilitatea lui roşu-roşu este mai mare decât a lui roşu-negru. Cine câştigă? Câştigă *B*. Într-adevăr, există, în ansamblul celor trei bilete, trei feţe colorate cu roşu, fiecare dintre ele având aceeaşi posibilitate de apariţie. Dintre acestea trei, două conduc la culoarea roşu pe verso, deci probabilitatea culorii roşu pe verso este 2/3. Din nou, rezultatul corect îl contrazice pe cel care apare la prima vedere, aşa cum i s-a întâmplat lui *A*. Deruta acestuia s-ar putea explica prin faptul că în mod spontan nu se observă că anumite cazuri nu sunt egal probabile; numai la o examinare mai atentă se pot discerne cazurile cu aceeaşi şansă de apariţie.

Toate problemele discutate mai sus, asociate cu primii paşi ai ştiinţei hazardului, au desigur o semnificaţie istorică şi, în acelaşi timp, pot fi azi abordate de elevii care au parcurs unele elemente de combinatorică. Însă perioada de pionierat a teoriei probabilităţilor a depăşit această fază elementară. Astfel, un alt membru al familiei Bernoulli, Daniel, s-a ocupat de jocul următor, ceva mai complicat: Fie o urnă care conţine n bile albe, o a doua urnă care conţine *n* bile negre şi o a treia urnă, care conţine *n* bile roşii. Se extrage la întâmplare câte o bilă din fiecare urmă. Bila extrasă din prima urnă se introduce în urna a doua, bila extrasă din urna a doua se introduce în urna a treia, iar bila extrasă din urna a treia se introduce în prima urnă. Se repetă această operaţie de *x* ori. Care sunt numerele aşteptate (deci care merită să fie jucate) de bile de diferite culori în fiecare dintre cele trei urne? Problema a fost rezolvată de Daniel Bernoulli, dar soluţia este prea complicată pentru a o prezenta aici. Warren Weaver, autorul cărţii

Doamna Şansă (tradusă din engleză), care ne-a ghidat în capitolul de faţă, vede în acest joc o expresie a complexităţii proceselor în care intervine întâmplarea.

Consideraţiile de mai sus au scos, sperăm, în evidenţă faptul că dincolo de aspectul ludic al probabilităţii, se află rolul important al acestei noţiuni în toate sectoarele vieţii şi ale cercetării. „Calculul probabilităţilor nu este numai o recreaţie sau o călăuză pentru jucătorii de baccara, el merită să-i aprofundăm principiile", scria Henri Poincaré în *Introducere* la *Science et Hypothèse*, traducerea românească la Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

„Fizicianul e un jucător care își evaluează șansele"

Citatul din subtitlul de mai sus este tot din Poincaré (*Ştiinţă şi ipoteză*, capitolul XI). Poincaré (1854-1912) a trăit într-o perioadă în care funcţia predictivă a ştiinţei era încă la mare cinste. Şi totuşi, el şi-a dat seama de relativitatea ei. „Oricât de trainic fundamentată ni s-ar părea o previziune, nu putem fi siguri că experienţa nu o va dezminţi. Dar probabilitatea este de obicei destul de mare, pentru ca, practic, să ne putem mulţumi cu ea. Poincaré ne atrage atenţia asupra capcanelor filozofice ale probabilităţii definite ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor posibile într-o anumită experienţă, cu condiţia ca acestea din urmă să fie egal probabile. Definim deci probabilul prin probabil. Cum vom şti că două cazuri posibile sunt la fel de probabile? se întreabă Poincaré şi adaugă: Printr-o convenţie? Dar atunci, de îndată ce vom face o aplicaţie va trebui să probăm legitimitatea convenţiei în cazul particular considerat, găsindu-ne astfel din nou în faţa dificultăţii pe care am crezut că am eludat-o. Ajuns aici, Poincaré se întreabă dacă nu cumva bunul-simţ este suficient pentru a decide ce convenţie anume trebuie să adoptăm. Dar şi această cale se dovedeşte uneori insuficientă. Poincaré dă exemplul lui J.Bertrand, care şi-a propus să evalueze probabilitatea ca, într-un cerc, o coardă să fie mai lungă decât latura triunghiului echilateral înscris. Adoptând succesiv, două convenţii pe care bunul-simţ părea să le impună cu

aceeaşi forţă, prima dintre aceste convenţii conduce la probabilitatea 1/2, iar cealaltă la 1/3. Să deducem de aici că trebuie să renunţăm la intuiţie şi, implicit, la o ştiinţă a întâmplării? Poincaré dă un răspuns categoric negativ. În cei aproape o sută de ani care s-au scurs de atunci, discuţiile asupra ideii de probabilitate au cunoscut o intensitate crescândă: dar reflecţiile lui Poincaré asupra acestei teme continuă să fie actuale. Nici Poincaré nu poate eluda rolul deosebit de instructiv al jocurilor de noroc, de exemplu jocul la ruletă, pe care-l găseşte de acelaşi tip cu unele situaţii din fizică. Un cadran este împărţit în subdiviziuni egale, colorate alternativ roşu şi negru. Se lansează cu forţă un ac indicator care la un moment dat se opreşte în faţa uneia dintre subdiviziuni, a cărei probabilitate de a fi colorată în roşu este evident 1/2. Toţi jucătorii îşi dau seama de acest lucru, dar de aici ei cad de cele mai multe ori în următoarea eroare, pe care am mai semnalat-o într-un alt context. Dacă de mai multe ori consecutiv acul se opreşte la roşu, ei deduc că e puţin probabil ca la tragerea următoare să se oprească iar la roşu şi mizează cu siguranţă pe negru, în ideea că este o raritate ca, de exemplu, să iasă roşu de şapte ori consecutiv. Dar nu îşi dau seama că şi combinaţia „şase de roşu urmate de un negru" este la fel de rară,deci de puţin probabilă, ca şi combinaţia a şapte de roşu. Din nou se ignoră condiţia echiprobabilităţii evenimentelor la care raportăm cazurile favorabile.

Dar faptul cel mai semnificativ, în gândirea lui Poincaré, este cel pe care l-am evidenţiat în subtitlul acestei secţiuni. Poincaré ne atrage atenţia că ştiinţa îl plasează pe cercetător în situaţia ludică a unui jucător, situaţie în care regăsim atributele esenţiale ale jocului.

Matematica la loto

Să presupunem că trebuie aleasă o combinaţie de p numere dintre primele n numere naturale (evident, p este mai mic decât n). S-a observat că foarte mulţi jucători ţin să se asigure într-un fel oarecare că numerele pe care le aleg sunt cât mai „la întâmplare". Dar regulamentul jocului de loto prevede că dacă mai multe persoane au ales o aceeaşi combinaţie câştigătoare, atunci câştigul se împarte la numărul

persoanelor respective. Calculul probabilităţilor nu te poate învăţa cum să câştigi la loterie, dar te ajută să evaluezi şansele de câştig. Însă alături de partea logică există şi o parte psihologică, aceste două părţi putându-se combina. Într-adevăr, mai sus am făcut două constatări. Una logică: atunci când numărul celor care aleg o aceeaşi combinaţie creşte, câştigul posibil pentru fiecare dintre jucătorii care au ales această combinaţie descreşte. Apoi, o constatare psihologică: cei mai mulţi se orientează spre combinaţii care li se par cât mai întâmplătoare, în sensul că nu prezintă nici o regularitate aparentă. (Unii aleg combinaţii legate de anumite date personale, dar regularitatea care ar putea apărea aici este sesizată numai de jucătorul în cauză). Ce rezultă de aici? Că o combinaţie de o regularitate frapantă, ca 1,2,3, a cărei probabilitate de a fi câştigătoare este exact aceeaşi cu a oricărei alte combinaţii de trei numere, oferă totuşi avantajul că, în cazul câştigător, există şi probabilitatea mare de împărţire a câştigului la un număr relativ mai mic de persoane decât în cazul altor combinaţii.

Discuţia nu se încheie aici. Este natural să ne întrebăm cât de mulţi ar putea fi cei care raţionează ca mai sus, combinând logicul cu psihologicul. Dacă aceştia sunt foarte numeroşi, atunci întregul raţionament este dat peste cap, deoarece el a fost efectuat în ipoteza tacită că aproape nici unul dintre jucători nu mai face o evaluare de acest fel. Ajungem astfel la aspectul sociologic al problemei şi nu ştim să se fi întreprins anchete sociologice printre jucătorii la loterie. S-ar putea întâmpla şi un alt fapt: dacă avem impresia că foarte mulţi jucători cred că numeroşi jucători realizează avantajul unor combinaţii de tipul 1,2,3, deci că în ultimă instanţă evită combinaţii de acest tip, tocmai acest fapt ne-ar putea determina să alegem o combinaţie de acest tip. Supoziţiile pot continua astfel la nesfârşit, fiecare oprindu-se acolo unde intuiţia sa logică, psihologică şi sociologică îl conduce. Dar nimeni nu poate merge la sigur în chestiuni atât de delicate.

Fascinaţia loteriei

La 9 iunie 2002, am organizat, în cadrul Institutului Internaţional de studii structurale şi semiotice de la Imatra (Finlanda), un Seminar cu

titlul „Semiotics of game and play", la care au participat Jouko Seppänen (Finlanda), Dobrila Djukich de Nery (Venezuela), Alexander Mosquera (Venezuela) şi autorul cărţii de faţă.

O privire istorică a fost propusă de profesorul Jouko Seppänen, de la Universitatea de Tehnologie din Helsinki, iar contribuţia sa este prezentată în această carte, la capitolul X: *Game, play, and their history.* Contribuţia noastră la acel Seminar face obiectul capitolului XI (ultimul) al acestei cărţi, capitol care poate fi considerat şi ca un rezumat al unei bune părţi a cărţii. Unele aspecte din *The cosmological ritual of lottery: Venezuelan study* aparţinând celor doi participanţi din Venezuela, vor fi luate în considerare în secţiunea de faţă.

Loteria fascinează întregi mase de oameni. În momentul în care redactăm aceste rânduri, o bună parte a publicului românesc îşi încearcă norocul la 6 din 49. Câteva săptămâni la rând nu apăruse nici un câştigător. Nu cumva şansa de câştig este prea mică? Dintr-o carte a lui Bart K. Holland: *What are the chances ?* (The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 2002, p. 86-90), aflăm că loteria din statul Virginia are un joc constând în alegerea a şase numere din primele 44 de numere naturale. Numărul total de combinaţii de şase numere din cele inferioare lui 45 este dat de 44!/(6!38!), care are ca valoare 7.059.052. Rezultă că orice combinaţie de şase numere are o probabilitate de câştig de aproximativ unu la şapte milioane. Dar dacă, aşa cum se întâmplă la noi, loteria îţi cere să alegi nu 6 din 44, ci 6 din 49, şansa de câştig este mult mai mică. Este interesant şi faptul că, teoretic, în condiţiile loteriei din statul Virginia (S.U.A.) este posibil ca, prin jucarea tuturor combinaţiilor posibile, cineva să-şi asigure şi combinaţia câştigătoare. Există însă riscuri în această privinţă. În primul rând, s-ar putea ca şi alţii să nimerească exact combinaţia câştigătoare, caz în care câştigul ar trebui împărţit la toţi câştigătorii, iar partea care ar reveni fiecăruia ar fi mult inferioară preţului total al lozurilor cumpărate. O altă sursă de risc este de natură pur pragmatică: s-ar putea ca cel care şi-a propus să cumpere atâtea lozuri câte combinaţii de şase numere sunt posibile să nu poată realiza acest lucru în timpul scurt alocat acestei operaţii. Dar s-ar mai putea ca loteria să refuze pur

şi simplu vânzarea către un singur cetăţean a unui număr atât de mare de lozuri, pentru simplul motiv că acest fapt ar încălca principiul de bază al loteriei, care este acela al unui joc de şansă, deci bazat pe hazard.

După Djukich şi Mosquera, „game" ar fi echivalent spaniolului „juego", provenind din latinescul „locus" şi semnificând „un exerciţiu de natură recreaţională, supus unor reguli şi în care se poate pierde sau câştiga". Egiptenii, reluându-l pe Platon, pretindeau că jocul este o invenţie a diavolului Zeud; după alţii, un alt diavol, Zabulon, ar fi la originea jocului. După un alt autor, jocurile bazate pe extrageri de numere erau practicate în Imperiul Roman.

Dar, în forma ei actuală, loteria a fost introdusă la 1670, de Papa Inocenţiu al III-lea, pentru a fi abolită la 1727 de Benedict al XIII - lea şi din nou admisă la 1731 de Clement al XII-lea, cu condiţia măririi câştigului. Ceva asemănător loteriei exista sub domnia lui Augustus şi sub aceea a lui Nero. Statul Vaticanului a preluat loteria romană, care a funcţionat cu regularitate până la 2 septembrie 1870, când a fost absorbită de statul italian.

Jocurile de acest fel au devenit un domeniu ideal pentru dezvoltarea a tot felul de superstiţii, constând, în esenţă, într-un simbolism numeric de care nu a scăpat aproape nici o zonă a existenţei umane şi a universului înconjurător.

În Spania, loteria are o lungă tradiţie, un exemplu semnificativ fiind Loteria de Crăciun, practicată la 22 decembrie, asociată cu un ceremonial de câteva ore, transmis la radio şi televiziune. În decembrie 2001, 92% din populaţie a oprit lucrul, pentru a privi acest ceremonial. În Venezuela, aproape toţi guvernatorii din aproximativ ultimii patru sute de ani au fost jucători la loterie. Cu toate acestea, în 1974, printr-o decizie guvernamentală,loteriile au fost interzise, cu excepţia celor din Caracas, Oriente, Tachira şi Zulia.

În America Latină, ca şi în multe ţări occidentale, trebuie distins între jocurile legale şi cele ilegale. Sunt legale, între altele, cursele de cai, loteriile, tirul, jocurile de cărţi şi cele din iarmaroace; sunt interzise, între altele, luptele de cocoşi şi ruleta.

Djukich şi Mosquera acordă o atenţie specială jocului prilejuit de

publicitatea de care beneficiază loteriile; este vorba deci de un joc de al doilea ordin, de un metajoc, acesta dovedindu-se, în cazul de faţă, mai complex decât însuşi jocul care l-a generat. Acest metajoc antrenează toate canalele din mass media şi speculează toate aspectele şi slăbiciunile psihicului uman. Internetul este şi el folosit din plin în acest scop. Mijloace verbale, muzicale şi vizuale dintre cele mai variate se prevalează de date astrologice, de simbolismul viselor şi al numerelor, de ritualurile religioase, de horoscoape şi de tot felul de superstiţii pentru a stimula jocul la loterie.

Se ţine seama de faptul că o mare parte a populaţiei din Venezuela este analfabetă. Aflăm că în Venezuela femeile între 13 şi 19 ani şi cele peste 30 de ani îşi încearcă norocul la loterie mai mult decât bărbaţii; situaţia este inversă pentru vârstele între 20 şi 30 de ani. Djukich şi Mosquera observă, în concluzie, că fascinaţia mulţimilor pentru jocurile cu miză ale hazardului este esenţial asociată cu fascinaţia spectacolului pe care aceste mulţimi de oameni îl oferă.

Dar oare numai loteriile generează acest metajoc formidabil? Nu este la fel de interesant metajocul generat de jocurile sportive (în primul rând fotbalul) sau de spectacolele de circ, de teatru sau de televiziune ? De îndată ce acceptăm trecerea de la joc la metajoc, devine inevitabil şi jocul de al treilea ordin, adică cel generat de metajoc şi putem merge în această direcţie oricât de departe.

Loteria face parte din jocurile hazardului, în care jucătorul nu poate interveni în nici un fel, nimic nu depinde de el. La polul opus se află acele jocuri competitive în care (aproape) totul depinde de jucător, de forţa şi /sau inteligenţa sa: boxul şi şahul sunt numai două exemple de acest fel.

Între ele, se află jocurile de risc maxim, ca duelul, alpinismul, cascadoria şi paraşutismul şi jocurile de schimbare a identităţii, cum sunt spectacolele de teatru şi cele de deghizare, de adoptare a unei măşti. În jocurile hazardului, jucătorul poate pierde bani, bunuri materiale, dar nu şi viaţa, cum se întâmplă în cele de risc maxim. În jocurile de schimbare a identităţii, care includ şi multe jocuri ale copilăriei, de

exemplu jocurile de vertij, ca datul în scrânciob, nu există de regulă nici riscul pierderii banilor, nici cel al pierderii vieţii, dar este uneori posibil insuccesul (faţă de un anumit public) şi chiar eşecul clar (cum se întâmplă uneori cu artiştii de circ, atunci când ratează o anumită probă). Dar faţă de cele patru tipuri de jocuri mai trebuie considerate şi altele. De exemplu, jocurile de performanţă scenică interferează cu cele de schimbare a identităţii. Acestea din urmă pot face obiectul unui spectacol, ca cel oferit de un mim sau de o piesă de teatru, dar pot fi practicate şi fără a avea în vedere un public şi o scenă, ci numai dorinţa de amuzament în familie sau într-un cerc de prieteni. Pe de altă parte, există spectacole în care interpretul nu numai că nu-şi schimbă identitatea, dar caută să-şi ducă la desăvârşire tocmai identitatea sa autentică: un violonist, un pianist, un dirijor sunt numai câteva exemple.

Nicolae Manolescu (*Despre joc*, în *Julien Green şi strămătuşa mea*, Cartea Românească, Bucureşti, 1984, p. 52-55) este de părere că singurele jocuri care rămân absolut străine animalelor sunt cele ale hazardului. Aici sunt conţinute două afirmaţii: a) animalele practică jocuri de competiţie, de simulare şi de risc maxim; b) animalele nu practică jocuri de pur hazard. În legătură cu fiecare dintre aceste afirmaţii, există două posibilităţi, după cum avem în vedere jocuri în care jucătorul intră ca urmare a propriei decizii sau jocuri în care jucătorul este implicat datorită unor factori pe care nu-i poate influenţa, deci care nu depind de el. În acest din urmă caz, există iarăşi două posibilităţi, după cum jucătorul devine sau nu conştient de implicarea sa în jocul respectiv. Chiar din momentul în care se naşte, o fiinţă vie se află implicată într-un joc strategic al vieţii, al supravieţuirii, fără a fi conştientă de acest lucru, fără a-l înţelege. La o anumită vârstă, fiinţele umane încep să-l înţeleagă, dar celelalte vieţuitoare nu par a deveni conştiente vreodată de el, chiar dacă instinctual se comportă uneori ca şi cum l-ar înţelege. Jocul vieţii are elemente de joc strategic, dar şi elemente de competiţie; din el nu lipseşte nici factorul hazard, chiar dacă nici competiţia, nici hazardul nu sunt conştientizate de jucătorul animal. Pătrundem astfel în domeniul jocurilor pe care nu le practicăm de bună-voie, ci împinşi de

forţele oarbe ale instinctelor. La fel, jocul interacţiunii cu natura al oricărei fiinţe vii începe înainte ca el să fie asumat de către jucătorul uman şi rămâne pur instinctual la jucătorul animal.

Nicolae Manolescu se referă şi la faptul că Roger Caillois (în cartea sa citată în primul capitol) îl critică pe Huizinga pentru faptul de a considera gratuitatea o trăsătură esenţială a jocului; ar urma ca jocurile de noroc practicate tocmai cu scopul unui câştig să nu mai fie considerate jocuri. Dându-i dreptate lui Huizinga, Manolescu are în vedere destinaţia de bază a jocurilor de noroc, aceea de a fi practicate de dragul jocului. Bine observă Manolescu: „...nu e cu adevărat jucător cel care, având o dată noroc, renunţă să mai joace şi rămâne cu banii...". Cum rămâne atunci cu aparenta contradicţie dintre gratuitate şi câştig? Răspunsul a fost dat în primul capitol şi îl reluăm aici într-o altă formă. Jocul, în realizările sale efective, nu prea există în stare pură, el este mereu contaminat cu elemente străine ludicului. Toate jocurile ajung să încalce virtutea gratuităţii, de exemplu, prin simplul fapt că sunt atrase în competiţii răsplătite cu câştiguri. Este suficient să privim situaţia din fotbal, un joc sportiv distorsionat grav de latura sa financiară.

Ce au ajuns jocurile olimpice, iniţial exclusiv o expresie a dorinţei omului de autodepăşire?

Relaţiile joc-muncă, gratuitate-utilitate au preocupat şi ele pe mulţi autori. Manolescu observă că „se joacă indivizii, munceşte specia". Adevărul profund al acestei observaţii rezultă din faptul că perechea „joc-muncă" nu este ceea ce se cheamă uneori o pereche conjugată, adică o pereche de termeni în care fiecare termen se dezvoltă în dauna celuilalt. Dimpotrivă, ea este o pereche în care fiecare termen este cerut de celălalt. Ceea ce la nivel social şi istoric este perceput ca muncă şi ca utilitate nu ar fi posibil fără libertatea ludică acordată indivizilor. În măsura în care munca este creatoare, ea este rezultatul practicării libertăţii jocului, libertate care include dreptul la greşeală şi la eşec.

CAPITOLUL VI
LATURA SPORTIVĂ A MATEMATICII ELEMENTARE

Nu ducem lipsă de talente

Este o bucurie, pentru cei care fac educaţia matematică a tineretului, să constate cât de multe talente apar, elevi şi studenţi care se îndreaptă aproape spontan spre matematică, investesc în ea pasiune şi inteligenţă. Cum îi recunoaştem? Cum le întreţinem şi le dezvoltăm interesul pentru matematică? Spre ce fel de matematică îi orientăm? Ce facem pentru ca ei să nu se plictisească în timp ce colegii lor fac efortul de a înţelege ceea ce ei de mult au înţeles?

În primele decenii ale secolului al XX-lea, tendinţa dominantă printre elevii talentaţi la matematică era preocuparea de geometrie elementară. Paginile „Gazetei matematice" stau mărturie pentru aceasta. Nu întâmplător Gheorghe Ţiţeica şi Traian Lalescu au publicat lucrări dedicate geometriei elementare, deşi cercetările ştiinţifice pe care ei le-au efectuat şi pentru care şi-au căpătat un loc de onoare în istoria matematicii se refereau la domenii de matematică superioară (în special, geometria diferenţială pentru Ţiţeica şi teoria ecuaţiilor integrale pentru Lalescu). În ceea ce-l priveşte pe Dan Barbilian (poetul Ion Barbu), pasiunea sa pentru geometria elementară a rămas statornică de-a lungul întregii vieţi, cum se poate vedea şi din cele două volume de *Pagini inedite* publicate postum la Editura Albatros.

Însă orizontul cultural şi răspunderea socială a matematicii erau în urmă cu 70 de ani incomparabil mai restrânse decât azi. Aşa se şi explică faptul că interesul, în întreaga lume, pentru orientarea celor talentaţi la matematică este mult mai mare decât în trecut. Cercurile

de matematică, sesiunile de comunicări, olimpiadele, concursurile profesional-ştiinţifice de matematică ale studenţilor converg toate spre unul şi acelaşi scop: stimularea şi cultivarea talentelor.

Literatura de specialitate publicată la noi include destule lucrări adresate „vârfurilor". În 1978 a fost publicată la Editura Tehnică versiunea în limba română a lucrării *Olimpiadele internaţionale de matematică*, de E.A. Morozova, I.S. Petrakov şi V.A. Skvorţov. În această lucrare sunt prezentate problemele propuse la primele 12 olimpiade internaţionale de matematică, începând cu anul 1959, când a avut loc prima olimpiadă de acest fel (în România). Alte zece olimpiade internaţionale de matematică (începând cu anul 1973) sunt prezentate de profesorul Ion Cuculescu în lucrarea *Olimpiadele internaţionale de matematică ale elevilor* (Editura Tehnică, 1984). Am dori să insistăm asupra aceste cărţi de excepţie, deoarece, în inflaţia de culegeri de probleme care pretind că-i ajută pe candidaţii la tot felul de concursuri şi examene, uneori se creează o confuzie a valorilor şi nu totdeauna câştigă cele mai bune.

Stilul Cuculescu

Departe de a fi compilaţie, cum atâtea culegeri sunt, cartea profesorului Cuculescu este, cum se spune, o lucrare de autor, una dintre rarele lucrări care ne introduc în gândirea matematică propriu-zisă, cu ezitările şi căutările ei, cu alegerile şi renunţările inerente în faţa necunoscutului. Matematica nu apare aici ca un produs finit, gata elaborat, ci împreună cu procesul intelectual care i se asociază. Spre deosebire de cartea anterioară, menţionată mai sus, dedicată aceleiaşi teme, unde problemele cu soluţiile lor au fost pur şi simplu colecţionate de la conducătorii delegaţiilor ţărilor participante, cartea de faţă poartă marca autorului, are un stil inconfundabil, pe care-l putem numi *stilul Cuculescu*. Semnificativă este, în această privinţă, mărturia, pe care chiar autorul o face în prefaţa cărţii sale: „Soluţiile ce le prezentăm nu sunt totdeauna cele ale propunătorilor, ci, de regulă, cele găsite de

autorul cărţii în cursul lucrărilor juriului". De fapt, autorul procedează mult mai democratic, prezentând de multe ori, la o aceeaşi problemă, mai multe soluţii (inclusiv cele venind de la propunători, de la alţi membri ai juriului, de la concurenţi) şi însoţindu-le de comentariile de rigoare. Dar Ion Cuculescu merge şi mai departe, introducându-ne în laboratorul de lucru al juriului fiecărei olimpiade internaţionale de matematică şi făcându-ne participanţi la geneza unor probleme, atunci când varianta propusă juriului trebuie modificată. Un caz tipic este cel al problemei: „Fie *A* suma cifrelor numărului 16 la puterea 16 şi fie *B* suma cifrelor lui *A*. Să se afle suma cifrelor lui B, fără a se calcula 16 la puterea 16. Se lucrează numai cu sistemul zecimal de scriere". S-a obiectat că „fără a calcula pe 16 la puterea 16" este o condiţie ce poate deruta pe concurenţi. Şeful uneia dintre delegaţii a atras atenţia că pentru concurenţii din ţara sa calculul lui 16 la puterea 16 n-ar dura decât un sfert de oră, ceea ce ar fi contrar spiritului Olimpiadei. Trebuia deci înlocuit acest număr cu altul. Ion Cuculescu ne prezintă (la p. 104 a cărţii sale) considerentele care au condus juriul la înlocuirea lui 16 la puterea 16 cu 4444 la puterea 4444.

În legătură cu participarea la olimpiade sunt valabile, în esenţă, aceleaşi principii ca şi la diferitele examene şi concursuri de matematică de-a lungul anilor de şcolarizare şi studenţie. Dacă însă, la examenele şi concursurile obişnuite, destinate masei de elevi sau studenţi, problemele propuse au un caracter oarecum standard, care permite rezolvarea lor pe baza cunoaşterii temeinice a materiei şi a unui antrenament corespunzător, alta este situaţia olimpiadelor de matematică şi cu atât mai mult a celor internaţionale. Aici, partea de rutină este redusă la minimum. Accentul nu cade pe cunoştinţe (deşi bogăţia lor este extrem de binevenită), ci pe iniţiativa personală, pe o asociaţie fericită de idei, care trebuie să te viziteze pe parcursul celor câteva ore care constituie durata unei probe. S-a discutat mult dacă o atare situaţie este compatibilă cu natura activităţii matematice, a activităţii de cercetare în general. „Matematica nu se face în stare de urgenţă", ne previne şi Ion Cuculescu.

Matematica la cronometru?

Nu sunt puţini tinerii talentaţi la matematică, dar care nu dau randament la olimpiade şi concursuri. Unul dintre ei, un valoros student al Facultăţii de Matematică, autor de pe acum al unor rezultate originale, mi-a declarat fără ocol: „Nu-mi place matematica pusă la cronometru!“ În sprijinul acestei atitudini se situează mărturiile unor matematicieni de seamă, ca Henri Poincaré şi Jacques Hadamard, care accentuează caracterul imprevizibil al invenţiei matematice. Ore întregi de reflecţie în faţa foii de hârtie se pot dovedi sterile, pentru ca ideea mult aşteptată să ţâşnească ulteriror, într-o împrejurare fără nici o legătură cu problema care ne frământă. În această privinţă, este de multe ori menţionată celebra descoperire a funcţiilor fuchsiene de către Henri Poincaré, care voia să le găsească o expresie sub forma raportului a două serii, pe baza unei analogii cu funcţiile eliptice, dar căutările se dovedeau infructuoase. Şi iată cum a venit soluţia, chiar în relatarea lui Poincaré: „Plecam din oraşul Caen, unde locuiam, pentru a participa la o excursie geologică. Întâmplările călătoriei m-au făcut să uit cu totul de preocupările mele matematice. Tocmai sosisem la Coutances, unde urma să ne suim într-un omnibus. În momentul în care am pus piciorul pe scara omnibusului am avut brusc revelaţia faptului că transformările pe care le utilizasem pentru a defini funcţiile fuchsiene erau identice cu cele ale geometriei neeuclidiene. Nu puteam verifica în acel moment dacă lucrurile stau într-adevăr aşa, însă imediat după întoarcerea la Caen m-am convins că totul este corect“. Tot Poincaré relatează o altă împrejurare, asemănătoare: Mă preocupau unele chestiuni de natură aritmetică, dar nu reuşeam deloc să le lămuresc. Dezgustat de insucces, m-am dus pentru câteva zile la mare, preocupat de cu totul alte lucruri. Într-o dimineaţă însă, plimbându-mă pe faleză, m-a fulgerat ideea că transformările aritmetice ale formelor pătratice ternare nedefinite sunt identice cu cele ale geometriei neeuclidiene.

Ce putem spune pe marginea acestor mărturii ale unuia dintre cei mai mari matematicieni din ultima sută de ani? Desigur, şi unui concurent

la olimpiadă i se poate întâmpla să găsească soluţia problemei abia a doua zi, de exemplu chiar în clipa în care se trezeşte, Jacques Hadamard, un alt mare matematician francez (din prima jumătate a secolului al XX-lea), relatează că, trezit odată brusc din somn de un zgomot extern, i-a apărut soluţia unei probleme care-l preocupa de multă vreme. Problemele de olimpiadă sunt de obicei inedite şi îl aduc pe candidat în imediata apropiere a activităţii de cercetare. După părerea lui Ion Cuculescu, o problemă de olimpiadă generează reacţii de tipul următor: a) nu ştiu, b) să mă gândesc, c) am găsit ideea, d) să redactez corect şi complet. Însă după d) poate urma c') m-am înşelat! c") să perfecţionez sau chiar b') să caut altă cale. În mod special atrage atenţia următoarea observaţie a lui Ion Cuculescu: Dacă în loc de b) apare b") să-mi aduc aminte, atunci am ieşit din spiritul Olimpiadei de Matematică.

În absența imaginației, este suprasolicitată memoria

Să încercăm să desprindem semnificaţia acestei ultime observaţii. Psihologia celor care se prezintă la un examen este dominată de grija de a-şi aminti ceea ce au învăţat. Mai toţi cei care eşuează la un examen invocă o carenţă a memoriei, mai nimeni nu recunoaşte că n-a înţeles o anumită idee, un raţionament, un concept, o metodă. De fapt, rolul memoriei în procesul de învăţare a matematicii este mult mai mic decât se crede. Faţă de cele vreo 50 de teoreme care trebuie învăţate pentru un examen, demonstraţiile respective se repartizează la mai puţin de vreo zece tipuri. Conceptele şi teoremele se clasifică şi ele pe baza unor analogii. Raţionamentul analogic este unul dintre cele mai puternice instrumente ale gândirii matematice. Din păcate, el este folosit în învăţământ într-o măsură prea mică. Însă orice economie de analogii trebuie compensată printr-un efort suplimentar de memorie. Dacă, de exemplu, nu ne-am prevalat de faptul că teorema lui Rolle şi proprietatea lui Darhoux a derivatei se stabilesc pe o cale foarte asemănătoare, atunci va trebui să învăţăm demonstraţiile acestor două fapte matematice ca două demonstraţii distincte, deci efortul de memorie pe care-l vom

depune va fi aproape dublu. Cel care nu este antrenat în desfășurarea unui efort de imaginație, caută să compenseze aceasta printr-un efort de memorie. Tocmai această situație caută s-o evite olimpiadele de matematică. Cunoștințele cerute concurenților sunt minime, deoarece trebuie să existe certitudinea că ele au fost parcurse de toți concurenții, indiferent de școala de la care provin. Însă acest caracter relativ elementar al problemelor se asociază cu un grad de dificultate ridicat, care se manifestă prin faptul că problemele nu seamănă prea mult cu nici una dintre problemele cunoscute din cărțile standard. Concurentul la olimpiadă trebuie să se bazeze în primul rând pe inițiativa și imaginația sa și numai în al doilea rând pe cunoștințele sale.

Știința și arta de a întreba

Față de aceste exigențe, alegerea problemelor propuse concurenților trebuie făcută cu deosebită grijă. Ion Cuculescu nu se mulțumește (în cartea sa menționată mai sus) să prezinte problemele propuse efectiv concurenților, ci ia în discuție ansamblul problemelor propuse juriului și explică detaliat considerentele care au condus la alegerea anumitor probleme și nu a altora, în funcție de gradul lor de dificultate, cunoștințele presupuse, eventuale ambiguități în formulare, varietatea tematică a problemelor, varietatea tipurilor de raționament cerute pentru rezolvare etc. Ne aflăm astfel pentru prima oară în fața unei cărți de matematică din care se poate învăța nu numai cum se rezolvă o problemă, ci și cum se alcătuiește o problemă. Nu este oare întrebarea la fel de importantă ca și răspunsul? Știința și arta de a întreba sunt chiar mai dificile decât știința și arta de a răspunde, deoarece răspunsul este în mare măsură ghidat de modul de formulare a întrebării. Iscusința lui Socrate de a-l conduce pe interlocutor la descoperirea adevărului, printr-un șir de întrebări adecvate, a rămas un model de atitudine creatoare în învățare. Interlocutorul este astfel provocat la un efort fără de care descoperirea nu este posibilă, iar învățarea fără descoperire nu este eficientă, pentru a nu mai vorbi de faptul că descoperirea prin propriile

forţe este şi recompensa (intelectuală) care răsplăteşte efortul şi care stimulează la depunerea unor noi eforturi. Este de aceea important să ne învăţăm să formulăm nedumeririle noastre, să le explicităm sub forma de întrebări precise. Întrebarea este forma elementară a creativităţii, cu ea începe orice act de inteligenţă. Este regretabil faptul că unii elevi îşi cenzurează întrebările, de teamă că acestea ar putea fi considerate un act de indisciplină. Din păcate, unii profesori stimulează această atitudine, prin reacţia nervoasă la unele întrebări şi prin faptul că nu acordă acestora atenţia cuvenită. Alteori, elevii se abţin să întrebe de teama de a nu se face de râs. Mi s-a întâmplat de multe ori să constat că profesorul foloseşte cuvinte pe care mulţi elevi nu le înţeleg, dar nici unul dintre aceştia nu cere explicaţia de rigoare. Întrebarea nu e lucru de ruşine! Iată un adevăr care ar trebui repetat mereu, deoarece fără capacitatea de a întreba, fără ştiinţa şi arta întrebării, omul este condamnat la ignoranţă şi lene. Progresul cunoaşterii nu atrage cu sine o reducere a numărului de întrebări, ci o creştere vertiginoasă a acestuia. Multe întrebări rămân vreme îndelungată fără răspuns, iar altele comportă o infinitate de răspunsuri, nici unul definitiv. Există un adevărat snobism al abţinerii de la întrebare, un snobism practicat în multe întâlniri de societate de către cei care preferă să rămână toată viaţa ignoranţi decât să-şi facă publică necunoaşterea unui anumit fapt. Se ajunge astfel la un fenomen paradoxal: cei care întreabă sunt, de cele mai multe ori, exact cei mai instruiţi şi mai inteligenţi. La orele de consultaţii vin şi sunt activi cu precădere studenţii foarte buni, iar în discuţiile de societate cei care nu se sfiesc să ceară o explicaţie privind semnificaţia unui cuvânt, de exemplu, sunt cei care şi-au însuşit o cultură vastă şi practică un exerciţiu continuu al inteligenţei.

Cum arată o problemă de inteligenţă

Problemele propuse la olimpiadele internaţionale sunt din domeniul aritmeticii, algebrei şi geometriei. Analiza nu este luată în considerare, deoarece ea nu constituie materie de învăţământ liceal în toate ţările

participante. Iată câteva mostre de probleme: 1) Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale *a* pentru care n^4+a nu este prim pentru nici un n natural. 2) Să se demonstreze că în orice tetraedru există un vârf, astfel încât cu cele trei muchii ce pleacă din el să se poată construi un triunghi ce le are ca laturi. 3) Fie P(x) un polinom cu coeficienţi întregi, al cărui grad, notat deg P, este mai mare sau egal cu 1. Fie n(P) numărul tuturor întregilor k pentru care $(P(k))^2=1$. Să se demonstreze că diferenţa n(P)- deg P nu întrece pe 2. 4) Să se determine cel mai mare număr care este produsul unor numere întregi pozitive, a căror sumă este 1976. 5) Este adevărat că orice poligon regulat plan cu un număr par de laturi se poate descompune într-un număr finit de romburi? 6) Să se determine dacă există, acele sisteme de logaritmi în care se poate întâmpla ca un număr real pozitiv să fie egal cu logaritmul său.

Această selecţie este suficientă, credem, pentru a da o idee despre natura nestandard şi gradul de dificultate pe care le prezintă chestiunile propuse la o olimpiadă internaţională de matematică. La cele mai multe probleme de acest fel, prima reacţie este de nedumerire în faţa unui lucru nou. Ele se constituie ca o provocare adresată inteligenţei noastre, ne stimulează ambiţia de a ne încerca puterile minţii. De cele mai multe ori, chiar punctul de plecare este misterios, problema se prezintă ca un mosor de aţă, căruia nu i se vede capătul. Spre deosebire de problemele de rutină adresate masei de elevi, probleme care (cu excepţia eventuală a celor de geometrie) comportă de obicei unele calcule şi relativ puţin raţionament exprimat în cuvinte, problemele de tipul celor ilustrate mai sus sunt dominate de aspecte calitative. Tratarea lor impune o argumentare bogată, în care calculele nu depăşesc de obicei 50% din text. Nu vom prezenta aici o atare soluţie, deoarece toate problemele sunt discutate pe larg de către Ion Cuculescu, în cartea sa. Autorul nu se mulţumeşte să prezinte sec soluţiile, ci îşi motivează alegerile şi strategia, compară diferite soluţii posibile, discută avantajele şi dezavantajele fiecăreia. Totul decurge într-o atmosferă deschisă, în care rămâne loc, din când în când, şi pentru o glumă. În acest fel, raţionamentul matematic se umanizează, iar ceea ce părea iniţial inaccesibil unei inteligenţe mijlocii devine normal şi chiar familiar.

Putem măsura performanța matematică?

O latură deosebit de interesantă a cărții lui Ion Cuculescu o constituie discutarea punctajului pe baza căruia au fost notate soluțiile problemelor. Ca și la concursurile de admitere în învățământul superior, și aici se alcătuiesc baremuri care prevăd câte puncte se acordă pentru fiecare parte a problemei. Cu privire la alcătuirea acestor baremuri au loc de multe ori discuții aprinse, deoarece ele propun o cuantificare a diferitelor părți ale soluției unei probleme, cu aprecierea ponderii pe care o prezintă fiecare parte în ansamblul soluției. Aici însă intervin mai multe dificultăți. În primul rând, o aceeași problemă comportă diferite soluții și de multe ori unii candidați prezintă soluții diferite de cele avute în vedere de comisia (juriul) de concurs. În al doilea rând – și acesta este impedimentul principal – baremul este stabilit în ipoteza că o componentă sau alta a soluției este ireproșabilă, în timp ce soluția efectivă propusă de un concurent prezintă deficiențe de o mare varietate, care depășesc de departe previziunile comisiei (juriului): calcule incomplete, raționamente inutil complicate, motivări insuficiente ale unor pași, greșeli mai mult sau mai puțin minore de calcul, redactarea neglijență etc. O chestiune care creează de multe ori discuții contradictorii între membrii comisiei este modul de apreciere a afirmațiilor greșite sau fără sens. Unii consideră că o lucrare de concurs trebuie apreciată exclusiv în raport cu ceea ce conține corect, alții sunt de părere că greșelile și nonsensurile trebuie penalizate, indiferent de faptul dacă, concomitent, concurentul a propus și o abordare corectă. Dar greșelile de gramatică sau de ortografie, anacoluturile, frazele fără șir, trebuie penalizate și în ce măsură?

Profanii sunt de multe ori mirați aflând că stabilirea punctajului în cazul unor probleme de matematică poate fi o operație atât de controversată. Însă pentru stabilirea gradului de gravitate a unei greșeli de calcul, a unei lacune într-un raționament, a unei complicări inutile, a unui demers nu s-a elaborat (încă?) o metodologie riguroasă și poate că nu se va elabora niciodată. Abaterile de la o tratare ireproșabilă a unei

probleme de matematică admit o infinitate de variante, pe care nimeni nu le poate evalua şi ierarhiza.

Este matematica de natură competitivă?

Dificultăţi similare apar în ceea ce priveşte ierarhizarea celor mai bune soluţii, ierarhizare impusă de necesitatea (?) de a se acorda premiul întâi, premiul al doilea, premiul al treilea etc. Ion Cuculescu prezintă, nu fără umor, discuţiile prilejuite de acest ritual al olimpiadelor. Termenul de olimpiadă are o rezonanţă sportivă şi, fără îndoială, vizează o anumită analogie cu olimpiadele sportive. De la acestea din urmă, olimpiadele de matematică împrumută elemente esenţiale, ca durata fixă a unor competiţii, notarea rezultatelor pe baza unui punctaj riguros, ierarhizarea concurenţilor etc. În această strategie se ţine seamă, fără îndoială, de tinereţea participanţilor la olimpiade, tinereţe setoasă de competiţie. Nu ar fi corect să subestimăm valoarea stimulativă a unor întreceri de acest fel, fapt confirmat şi de evoluţia ulterioară a multora dintre câştigătorii olimpiadelor internaţionale de matematică, deveniţi matematicieni redutabili, cu rezultate deosebit de apreciate în lumea specialiştilor. Autorul cărţii discutate mai sus, Ion Cuculescu, a fost şi el, în urmă cu câteva decenii, o vedetă a olimpiadelor naţionale de matematică (pe atunci nu existau încă olimpiadele internaţionale), iar astăzi este unul dintre matematicienii noştri de frunte în domeniul teoriei probabilităţilor.

Dar, imprimând olimpiadelor de matematică acest caracter sportiv, devin inevitabile anumite concesii, tot atâtea compromisuri faţă de natura reală a ştiinţei în general, a matematicii în special. În primul rând, chiar necesitatea de a se putea ierarhiza concurenţii impune selectarea unor probleme de un anumit tip, ale căror soluţii se pretează la o apreciere cât mai cuantificată. Predomină problemele de natură combinatorie, iar enunţurile sunt mai de grabă de tipul *să se arate că* ... decât de tipul *este adevărat că* ...?, pentru a nu mai vorbi de faptul că problemele de modelare matematică a unor fenomene de construire

a analogului, într-un anumit cadru, al unei situaţii dintr-un alt cadru (un singur exemplu, o problemă pe care am propus-o studenţilor din anul întâi: Cum ar arăta un analog pentru funcţii reale al lemei lui Cesaro de la şiruri?), posibile generalizări sau ameliorări ale unor teoreme sunt cu totul absente. Această sacrificare a unor probleme foarte apropiate de tipul celor care intervin efectiv în cercetare, dacă nu sunt chiar ele asemenea probleme, este impusă de încadrarea în normele de competiţie: durata fixă prestabilită (se pare că de patru ore) acordată concurenţilor pentru rezolvarea a trei probleme şi posibilitatea măsurării cât mai riguroase a calităţi soluţiilor.

De la probleme de concurs la probleme pur şi simplu

Este adevărat că durata de rezolvare a unei probleme nu e deloc o chestiune neglijabilă; dar durata este importantă în ceea ce priveşte problemele dintr-o anumită clasă, de exemplu privind timpul de calculator pe care îl comportă un anumit algoritm. Problemele la care trebuie „să-ţi dea prin gând ceva“ nu au fost niciodată rezolvate prin închiderea pe câteva ore a unor matematicieni într-o anumită încăpere. Desigur, exerciţiul de gândire prilejuit de olimpiade sau de celelalte concursuri cu durată fixă este un bun antrenament şi un elocvent test de capacitate, de concentrare a atenţiei şi efortului, de mobilizare a tuturor resurselor în vederea unui anumit scop. Dar această mentalitate competiţională poate deveni nocivă dacă ea nu este echilibrată de o orientare a preocupărilor spre problemele de fond şi de perspectivă ale ştiinţei. Din păcate, se observă de mai mulţi ani că structura diferitelor concursuri este determinantă pentru preocupările matematice ale celor mai mulţi tineri. Anumite capitole din manuale, deşi fac parte din programa liceală de matematică, nu se află în atenţia elevilor (şi, într-o anumită măsură, nici a profesorilor), pentru simplul motiv că ele nu figurează în programa de bacalaureat şi nici în aceea a concursurilor de admitere în învăţământul superior.

O privire generală asupra problemelor propuse la diferitele tipuri de concursuri, în diferite ţări ale lumii, este suficientă pentru a se observa că orizontul ştiinţific şi cultural al matematicii de concurs este destul de limitat, dacă nu derizoriu. Educaţia matematică a tineretului are astăzi o miză mult mai importantă, pe care trebuie să o onorezi. Pariul ei social are în vedere nevoia de matematică resimţită azi de aproape toate disciplinele. Simptomele acestei comenzi sociale sunt nenumărate, iar multe dintre ele sunt resimţite de matematicieni în relaţiile lor directe cu profesioniştii altor discipline. Chiar în timp ce scriam aceste rânduri, am fost întrebat la telefon, de către un cunoscut critic şi teoretician al filmului, ce sunt reţelele lui Petri şi unde poate citi despre ele, deoarece a aflat că acestea se aplică în studiul scenariilor de film. Oare pregătirea matematică a tineretului, în general, matematica de performanţă în special, n-ar trebui să înregistreze aceste mutaţii? Infuzia de gândire matematică devine o tendinţă tot mai accentuată în toate domeniile de activitate, iar antrenamentul în acest sens nu se poate baza numai pe exerciţii de virtuozitate matematică în sine. În afară de problemele de matematică pe care le rezolvăm pentru a ne pregăti în vederea unui concurs există şi probleme de matematică pe care le ridică dezvoltarea ştiinţei. Nu ar trebui asigurată o legătură şi un echilibru între cele două tipuri de probleme? Nu ar trebui explicată această legătură?

Olimpiadele

În domeniul matematicii, există la noi o frumoasă tradiţie a concursurilor şcolare. Concursurile „Gazetei Matematice“ au stimulat preocupările ştiinţifice ale tineretului timp de peste patruzeci de ani, lansând numeroase talente, din care s-au recrutat ulterior mulţi dintre matematicienii şi inginerii noştri de seamă. Olimpiadele de matematică organizate în ultimele decenii continuă, mai ales prin etapa lor finală, pe ţară, tocmai aceste concursuri care au animat viaţa noastră ştiinţifică în prima jumătate a secolului al XX-lea. Dar, evident, cei care au

conceput aceste întreceri în domeniul ştiinţei sau literaturii, prin analogie cu întrecerile sportivilor, nu au intenţionat să adauge, pur şi simplu, la şirul lung de controale la care oricum trebuie să se supună orice elev pentru a putea fi promovat, încă un examen. Intenţia nu a fost de a mări cu încă o unitate numărul şi aşa destul de mare de teze, extemporale şi examene orale ale elevilor. Întorcându-ne la semnificaţia originară a acestui cuvânt – OLIMPIADĂ – şi la adjectivul *olimpic* pe care l-a generat, intrăm imediat într-o atmosferă de sărbătoare şi fast, de maiestuos şi impunător, pe care în mod tradiţional olimpiadele sportive au creat-o. Aceste întreceri nu au fost gândite ca o activitate standard, de testare rutinară a unor capacităţi minimale ale concurenţilor.

Nu controlul unui bagaj minimal de cunoştiinţe şi deprinderi, ci o întrecere a talentelor şi a pasiunilor, pentru a se crea în acest fel o emulaţie generală, de natură să ambiţioneze pe cât mai mulţi elevi să lucreze la randamentul lor maxim; aceasta îşi propun olimpiadele.

Să ne referim la problemele propuse, de la începutul secolului până azi, la diferite concursuri şi olimpiade şcolare; multe dintre aceste probleme au fost strânse în două volume, unul aparţinând lui T. Roman, O. Sacter şi G.D. Simionescu (perioada 1900-1967), iar al doilea lui L. Panaitopol şi C. Ottescu (1968-1974); alte cărţi, mai recente, au colectat problemele de olimpiadă din perioada următoare; sunt printre ele multe frumoase, elegante, formulate lapidar, pline de ingeniozitate, vizând calităţile intelectuale ale tinerilor, spirit de observaţie, îndemânare combinatorie, capacitate de deducţie logică, putere de abstracţie şi analogie. Dar nu mai puţin adevărat este şi faptul că un mare număr de probleme sunt lipsite de o motivaţie convingătoare, fapt care le conferă un simplu caracter de joc, în genul problemelor de şah. Să se fi interpretat în acest fel analogia cu olimpiadele dedicate jocurilor sportive? În cei peste o sută de ani care ne despart de primele concursuri şcolare, matematica a parcurs o evoluţie impresionantă, dar ea se reflectă foarte palid în problemele date la olimpiade şi alte concursuri. Cu greu ar recunoaşte cineva în aceste probleme mutaţiile

aduse de viziunea structurală şi de cea algoritmică, rolul crescând al matematicii, aplicabilitatea ei universală.

Mai e însă şi un alt aspect. Problemele de olimpiadă nu s-au diferenţiat suficient, ca factură, de problemele curente. Nu avem în vedere aici diferenţa în ceea ce priveşte gradul de dificultate (această diferenţă a fost, în general, observată), cât diferenţa în gradul de atractivitate. Unele probleme propuse la olimpiade sunt aride şi nu-şi dezvăluie nici o semnificaţie cognitivă. Le propunem elevilor să rezolve nenumărate tipuri de ecuaţii, dar destul de rar sunt ei invitaţi să stabilească modul în care aceste ecuaţii iau naştere dintr-o problemă reală. Şi totuşi, elevii sunt cei care vor trebui să construiască modele matematice pentru problemele energetice, de materii prime, ecologice, de hrană sau informaţionale cu care omenirea este confruntată.

Matematică şi sport

La sport – sau măcar la ideea de sport ne întoarcem mereu, sub diferite forme şi motivaţii diferite. În copilărie, sportul este în primul rând plăcerea jocului şi pentru că, în mod spontan, energia copilăriei se cere cheltuită prin mişcare, sportul se constituie într-o preocupare majoră a copilului. De altfel, în această primă etapă a vieţii, orice activitate îşi cere o motivaţie ludică, fără de care ar deveni ceva impus, împotriva naturii.

Pregătirea fizică intervine esenţial până şi la şah. Dacă pentru sportivul de performanţă pregătirea fizică este un mijloc de a-şi menţine un randament sportiv satisfăcător, pentru noi ceilalţi raportul se inversează: sportul devine un mijloc – singurul existent – de a ne menţine o bună condiţie fizică. Nu este vorba aici numai de grija pentru sănătate, ci şi de faptul că sportul este cea mai fericită alternativă a activităţii intelectuale, cea mai bună replică ce i se poate da. Într-un veac în care mai toate profesiile se intelectualizează, pretinzând eforturi fizice din ce în ce mai reduse, această alternativă tinde să preocupe pe toţi membrii societăţii. Ideea că a te odihni înseamnă a face altceva

(„Omul are dreptul la concediu după ce şi-a făcut datoria să muncească. Cu totul altul e conceptul de «vacanţă», despre care nu se mai vorbeşte. În vacanţă, omul continuă să muncească, dar munceşte cum vrea", spunea Gr. C. Moisil; *Ştiinţă şi umanism*, p. 124) nu trebuie înţeleasă numai în sensul recuperării forţelor, dar şi sub aspectul măririi randamentului profesional. Tocmai prin distanţa pe care şi-o ia faţă de activitatea profesională, sportul capătă o considerabilă funcţie igienică, prin care creierul şterge toate reziduurile şi se creează disponibilitatea şi pofta pentru un nou efort intelectual.

Dar nu cumva această distanţare este în acelaşi timp o apropiere? Nu cumva, în semnificaţiile ei mai profunde, activitatea sportivă ne solicită şi ne dezvoltă unele aptitudini în egală măsură necesare în activitatea de cercetare şi de descoperire de orice fel? Gândirea strategică, spiritul de luptă şi de echipă, rezistenţa la eşecuri şi capacitatea de a le depăşi şi de a o lua, dacă e nevoie , de la capăt intervin în egală măsură într-un meci de fotbal sau de volei, într-o cercetare de laborator şi în pregătirea unui spectacol teatral sau a unui concert. Dacă în sport adversarul este o altă echipă sau se concretizează, pur şi simplu, în limitele de până ieri ale performanţelor corpului uman, în ştiinţă adversarul este natura care îşi ascunde cu viclenie secretele: sculptorul se luptă cu materia, iar poetul cu limbajul.

Iată de ce înţeleg foarte bine de ce mulţi dintre colegii mei matematicieni au îndrăgit alpinismul. Alţii au practicat fotbalul, înotul, rugbiul, voleiul, tenisul, şahul, despre ultimele două susţinându-se la Facultatea de Matematică din Bucureşti lucrări de diplomă foarte interesante. Deseori s-a întâmplat ca, întors de pe munte, un matematician să constate că a găsit soluţia unei probleme la care se gândea de mult.

Dar desigur, cu vârsta, practica sportului se restrânge, mulţi dintre noi mulţumindu-ne cu drumeţia şi cu unele exerciţii de gimnastică. Însă interesul pentru sport rămâne viu. Dacă nu mai păşim pe terenul de fotbal, mergem cel puţin la stadion; iar când nu ne putem duce la stadion deschidem televizorul. Sportul – mai ales cel de echipă – este în foarte mare măsură şi un spectacol, pentru că are o mare doză de nepre-

văzut. Din acest punct de vedere, fotbalul mi se pare a fi sportul rege. El are, pentru a mă exprima în termenii teoriei informaţiei, cea mai mare entropie, deoarece în nici un alt sport nu este atât de greu de prevăzut, ca în fotbal, ce anume se va întâmpla în faza următoare a jocului. Poate că aici se şi află unul din secretele popularităţii acestui sport. Într-o vreme în care, tot mai mult, rutina şi stereotipia se instalează în numeroase compartimente ale vieţii sociale, oamenii tânjesc după o mişcare rapidă şi imprevizibilă, pe care fotbalul, mai mult poate decât alte sporturi, o realizează.

Dacă din imaginea copilăriei mele nu pot elimina pasiunea pe care o puneam ca mijlocaş stânga al echipei de fotbal a străzii, mai târziu, ca matematician, am constatat că sportul îmi pune la dispoziţie metafore dintre cele mai fericite ale unor procese delicate din analiza matematică. Când, în urmă cu vreo 50 de ani, conduceam o grupă de seminar de matematici superioare la Facultatea de Energetică a Institutului Politehnic Bucureşti, prezenţa, în grupă, a studentei Lia Manoliu mi-a sugerat următoarea ilustrare a ideii de şir crescător, dar mărginit: fiecare aruncare a discului, deci şi recordurile Liei Manoliu, vor fi depăşite de alte aruncări şi alte recorduri, acest proces fiind practic nelimitat. Dar există un prag, determinat de limitele imanente ale organismului uman, dar necunoscut, care nu va putea fi depăşit. (Orice şir monoton şi mărginit este convergent). Distincţia dintre existenţă şi construcţie apărea astfel accesibilă chiar şi începătorilor în ale analizei matematice.

Momentul de tensiune pe care sportivul îl trăieşte în clipele de maximă concentrare îşi are un frate bun în momentul de inspiraţie al savantului şi al artistului. Pe toţi îi uneşte ambiţia autodepăşirii. Iar diplomaţii care, adunaţi în jurul meselor rotunde, discută marile probleme ale omenirii, pot primi şi ei sugestii utile din domeniul comportamentului sportiv.

CAPITOLUL VII
MATEMATICA ȘCOLARĂ ÎNTRE LUDIC, COGNITIV ȘI UTILITAR

Cum a fost contestat Euclid

Anii şaizeci au marcat, în multe ţări ale lumii, un punct de cotitură în predarea matematicii, în învăţământul ştiinţelor în general. Vechi tradiţii erau puse sub semnul întrebării. Deosebit de pregnant s-a manifestat aceste fenomen în Franţa. Momentul merită să fie evocat, deoarece matematica românească şi învăţământul nostru matematic s-au aflat într-o strânsă legătură cu matematica franceză. (începând din secolul al XIX-lea, cu Spiru Haret, mulţi dintre matematicienii noştri de seamă au susţinut teze de doctorat la Paris şi au adus la noi ideile, preocupările, mentalitatea matematicienilor francezi).

În perioada menţionată, matematica franceză era dominată de grupul de matematicieni cunoscuţi sub pseudonimul colectiv de Nicolas Bourbaki. Încă din anii treizeci, acest grup (care se primeneşte mereu, pentru a nu cuprinde decât matematicieni sub vârsta de 50 de ani) s-a angajat într-un proiect de amploare privind aşezarea matematicii moderne pe baza structurale. Proiectul s-a concretizat de-a lungul anilor într-un număr mare de volume, a căror influenţă asupra dezvoltării matematicii a fost deosebit de importantă. În mod special, învăţământul matematic universitar din ţara noastră s-a resimţit puternic de această influenţă, încă din deceniul al cincilea. De fapt, procesul de structuralizare se dezvoltă în matematică încă din primele decenii ale secolului nostru, simptomatică fiind în această privinţă constituirea ca discipline autonome a Topologiei, Analizei funcţionale şi Algebrei moderne de tipul celei prezentate într-o carte celebră a lui Van der Waerden. Dar prin Bourbaki matematica structurală capătă pentru prima oară o expunere sistematică şi unitară, care marchează, în matematică, un nou standard de rigoare.

Era inevitabil ca această orientare să influenţeze decisiv discuţiile angajate în anii şaizeci privind învăţământul matematic. O comisie ministerială, prezidată de André Lichnerowicz, membru al Academiei de Ştiinţe din Paris şi profesor la Collège de France, a lucrat timp de trei ani la elaborarea unor noi programe pentru învăţământul matematic francez, programe a căror aplicare a început în 1969. Un element şocant în noile programe îl constituia introducerea unor elemente de teoria mulţimilor şi a limbajului corespunzător. Unele elemente de logică matematică îşi găseau astfel şi ele loc. Sunt puse în evidenţă noi perspective de aplicare a matematicii, prin introducerea în programe a elementelor de calcul matricial, atât de important pentru înţelegerea fizicii moderne, şi prin studiul numerelor în alte baze decât zece, strâns legat de funcţionarea calculatoarelor electronice. Un alt element şocant îl constituia, în noile programe, restrângerea chestiunilor de geometrie elementară. Numeroşi fizicieni erau de părere că vechile programe consacrau un loc prea mare unor chestiuni de geometrie lipsite de aplicaţii semnificative.

Dar o atitudine negativă şi mai fermă faţă de elementele de geometrie euclidiană prezente în mod tradiţional în programele de matematică a fost manifestată de către reprezentanţii grupului Bourbaki. Profesorul Jean Dieudonné, membru al Academiei de Ştiinţe din Paris, nu s-a sfiit să proclame cu vehemenţă caducitatea geometriei euclidiene, incompatibilă cu spiritul integrativ şi structural al matematicii moderne. Dieudonné argumenta că teoremele fundamentale ale geometriei euclidiene (în orice număr de dimensiuni) sunt simple consecinţe ale conceptului de spaţiu vectorial în care se consideră o formă pătratică definită pozitiv; prin urmare, aceste din urmă elemente trebuie introduse în programa şcolară, evitându-se astfel complicaţiile cu triunghiuri şi cercuri. În schimb, se acordă atenţie transformărilor geometrice, începând cu translaţiile şi simetriile, transformări marginalizate în programele anterioare.

În ansamblu, noile programe propuse de comisia Lichnerowicz şi puternic marcate de gândirea lui Bourbaki pun accentul pe structurile care se află la baza matematicii, în special structurile algebrice (grup, inel, corp etc.) şi structurile de ordine. Prin aceasta, matematica

încetează de a fi o aglomerare de noţiuni şi rezultate eterogene, devenind în schimb un ansamblu organizat, în care componentele se articulează pe baza unei concepţii globale. O simplitate profundă este astfel revelată, întregul edificiu capătă o structură uşor inteligibilă.

Avantajele matematicii structurale greu pot fi contestate, iar fascinaţia pe care tratatul lui Bourbaki a stârnit-o în special în rândul tinerilor matematicieni de la noi şi de aiurea este pe deplin explicabilă.

Desigur, se poate pune problema dacă această viziune structurală asupra matematicii este adecvată din punct de vedere pedagogic. Comisia Lichnerowicz nu a neglijat acest aspect, dimpotrivă, i-a acordat întreaga atenţie, colaborând cu doi dintre cei mai mari specialişti în ceea ce priveşte psihologia învăţării matematicii, Jean Piaget şi Z.P. Dienes. Piaget a studiat modul în care copilul şi tânărul asimilează structurile algebrice, topologice şi de ordine, elaborând o întreagă periodizare în acest sens. Z.P. Dienes a elaborat tipuri de jocuri privind învăţarea matematicii la diferite vârste. Jocul, desenul şi manipularea îşi capătă fiecare locul adecvat, în conformitate cu un vechi proverb chinez, care spune că ceea ce numai se aude, se uită uşor, ceea ce se vede rămâne în amintire; înţelegi cu adevărat numai ceea ce faci tu însuţi.

Programele elaborate de comisia Lichnerowicz păstrează o bună parte din programele anterioare, dar caută să realizeze o unificare între elementele tradiţionale şi cele moderne, mai cu seamă cu ajutorul limbajului. Prin acest fapt, matematica şcolară atinge un nou nivel de rigoare.

Cei care cunosc istoria programelor şcolare de matematică din ultimele decenii, în ţara noastră, ştiu că şi învăţământul nostru a parcurs o evoluţie importantă în sensul modernizării. De altfel, aceasta a fost evoluţia predării matematicii în multe ţări ale lumii.

Spre o ştiinţă accesibilă celor mulţi

În campania de convingere a opiniei publice franceze de oportunitatea noilor programe de matematică puse în aplicare începând cu anul 1969, autorii acestor programe se prevalau în primul rând de situaţia nesatisfăcătoare în care ajunsese învăţământul matematic. Rezultatele acestui învăţământ erau din ce în ce mai slabe, lecţiile de matematică erau

urmărite şi asimilate de tot mai puţini elevi şi, ceea ce era mai grav, mulţi profesori de matematică se complăceau în această situaţie. Astfel s-a creat mentalitatea, atât de răspândită, conform căreia matematica este o disciplină aristocratică, destinată unui număr restrâns de elevi dotaţi. Ceilalţi elevi urmau să se resemneze cu învăţarea pe dinafară a unor procedee de rutină, care însă nu aveau nimic comun cu adevărata gândire matematică.

Cum s-a putut ajunge la această situaţie? Prin prezentarea tot mai artificială a matematicii ca o aglomerare de trucuri, de probleme „scoase din buzunar", prin absenţa motivaţiilor în ceea ce priveşte semnificaţia conceptelor şi teoremelor prezentate. Toate acestea erau de natură să intimideze pe elevul de rând, care se vedea tot mai mult obligat la un efort neînsoţit de nici o satisfacţie. Prin reforma promovată de noile programe se spera să se pună capăt acestei situaţii. Se sconta că logica de ansamblu care apare într-o abordare structurală, posibilitatea de a raporta toate detaliile la câteva relaţii fundamentale şi, deci, de a ierarhiza faptele după importanţa lor vor oferi elevilor motivaţiile necesare pentru a le face matematica nu numai inteligibilă, ci şi atractivă, prin legătura permanentă cu aspectele operaţionale şi utilitare. „Vrem să înarmăm pe copii pentru lumea anilor 1990", declara în 1971 André Lichnerowicz, preşedintele comisiei de reformă a învăţământului matematic francez. „Pentru aceasta – continua el – nu ne putem mulţumi să le dăm viitorilor fizicieni şi chimişti reţete de bucătărie; trebuie să le dăm tuturor elevilor o metodologie de gândire care să le permită să nu se afle niciodată sub dictatura unui pumn de oameni atoateştiutori". Accentuând ideea exigenţei crescute pe care trebuie s-o avem faţă de educaţia matematică a noilor generaţii, Jean Leray, membru al Academiei de Ştiinţe din Paris şi profesor la Collège de France, atrăgea atenţia că azi nu mai e suficient ca un copil să înveţe să numere şi să efectueze operaţii cu numere; la zece ani, el trebuie să şi înţeleagă ceea ce face. Practica mulţimilor în învăţământul elementar poate să ajute în acest sens, crede Jean Leray.

O formulare răspicată a dilemei în faţa căreia se află învăţământul matematic venea din partea lui Georges Th. Guilbaud, director de

studii la „École Pratique des Hautes Études", care într-o emisiune la televiziunea franceză, la 10 ianuarie 1972, considera că fondul problemei este a alege între un învăţământ ştiinţific apt să dea tuturor elevilor o cultură ştiinţifică adaptată timpului nostru şi un învăţământ elitar, care-i are în vedere numai pe cei ce vor continua studiile la universitate sau alte institute echivalente. Opţiunea era categoric pentru prima variantă.

Atitudini similare erau exprimate şi de reprezentanţii ştiinţelor fizice. André Lagarrique, director al Laboratorului de acceleratori lineari de la Universitatea Paris-Sud (Orsay) şi preşedinte al Comisiei ministeriale de reformă a învăţământului ştiinţelor fizice şi al tehnologiei, declara: „Trebuie să concepem un învăţământ ştiinţific pentru masa elevilor, nu pentru o elită restrânsă". De acord în linii mari cu reforma programelor de matematică, comisia condusă de A. Lagarrigue preconiza un învăţământ al fizicii bazat în mare parte pe observaţie şi măsură, pe activitate practică, pe latura experimentală a fizicii, pe lucrări practice simple de mecanică, electronică şi electricitate, pe folosirea curbelor şi a reprezentărilor grafice, pe studiul pluridisciplinar al unor mari ansambluri tehnologice (de exemplu, automobilul, aviaţia, televiziunea, petrolul, telecomunicaţiile).

Este lesne de înţeles că într-o problemă atât de complexă erau inevitabile unele dezacoduri atât între matematicieni cât şi între ei, pe de o parte, şi fizicieni, chimişti, naturalişti, pe de altă parte. Există totuşi un numitor comun care merită să fie subliniat, anume necesitatea unui echilibru între disciplinele abstracte, pe de o parte, şi ştiinţele de observaţie şi de experiment, pe de altă parte.

Rămânea de văzut cum se va implementa noua reformă. Un prim semnal de alarmă, venit atât din partea matematicienilor, cât şi din partea fizicienilor, se referă la faptul că noile programe păreau prea încărcate; ceea ce ele adăugau nu era suficient compensat de ceea ce se scotea. A doua problemă se referea la necesitatea reciclării profesorilor de matematică, în sensul noilor programe, ţinându-se seamă de faptul că masa acestor profesori, mai cu seamă la clasele mici, este foarte eterogenă ca grad de pregătire. Departe de a fi o improvizaţie, noua

reformă, experimentată timp de vreo zece ani în unele clase speciale, nu avea cum să realizeze peste noapte reciclarea masei de profesori. Operaţia era cu atât mai delicată cu cât nu era vorba numai – şi nici măcar în primul rând – de predarea unor cunoştinţe noi, ci şi de o nouă mentalitate în înţelegerea matematicii ca disciplină formativă.

Dar poate că dificultatea cea mai mare, în implementarea noilor programe, consta în realizarea unor manuale corespunzătoare. Aici s-au concentrat de altfel cele mai multe critici, unele venite chiar din partea partizanilor noii reforme. Însuşi Lichnerowicz a reacţionat negativ faţă de modul în care gândirea axiomatică era reflectată în noile manuale: „Axiomele sunt deseori paraşutate, în timp ce noi preconizăm, dimpotrivă, o abordare concretă, care să conducă natural la aceste axiome". Jean Leray observă că este o mare greşeală elaborarea în grabă a manualelor şcolare. Orice improvizaţie în această privinţă este plătită scump, deoarece mulţi profesori, insuficient acomodaţi cu noua materie şi cu noul spirit, manifestă o încredere oarbă în manualele după care predau. Alte critici se refereau la unele exagerări de limbaj. Este potrivit să ceri unui copil de 7 ani să înveţe cuvinte ca *echipotente* sau *disjuncte?* Este necesară această terminologie pentru înţelegerea noţiunilor respective?

Probleme ca cele de mai sus au fost mult discutate şi la noi şi sunt în continuare discutate şi acum. Experienţele altora sunt, de aceea, foarte instructive. Le vom urmări în continuare.

Cearta „matematicilor moderne"

Ceea ce părea iniţial o simplă critică a unor stângăcii şi greşeli tehnice ale manualelor a luat rapid forma unei reacţii de mari proporţii la reforma învăţământului matematic. La această reacţie au participat atât mari matematicieni, ca Jean Leray şi René Thom, cât şi mari fizicieni, laureaţi ai premiului Nobel, ca Alfred Kastler şi Louis Néel, ingineri (ca Marc Pélegrin, director al Şcolii Normale Superioare de Aeronautică şi Spaţiu) şi părinţi ai elevilor. Aceştia din urmă se trezeau dezarmaţi în faţa unor manuale pe care nu le mai înţelegeau, fiind astfel

în imposibilitatea de a-şi mai ajuta odraslele. Fizicienii se arătau îngrijoraţi de natura preponderent abstractă pe care o imprimau noile programe. „Invenţia, reuşita, descoperirea nu sunt decât punctul final al unui drum complicat care pleacă de la observarea faptelor, un drum în care logica îşi are şi ea locul ei, dar tot atât loc au şi intuiţia, tatonările, aproximaţiile succesive. Nu e oare primejdios să plecăm sistematic de la abstract? se întreba André Lagarrigue.

Marc Pélegrin (*Ne pas abandonner la règle de trois*, „Le Monde", 20 ianuarie 1972, p. 7) exprima punctul de vedere al inginerilor. El arăta că inginerul este hărţuit de un mare număr de probleme, luate individual nu prea complicate, dar în ansamblul lor reclamând utilizarea unui arsenal matematic bine adaptat şi într-o viziune sistematică. Avionul este un exemplu în acest sens. Calculele de rezistenţa materialelor implică manipularea unor matrice pătrate de dimensiuni uriaşe; este vorba aici nu de calcule ocazionale, ci de calcule efectuate zilnic pentru realizarea platformelor de foraj sau a aripilor de avion. Fără calcul matricial, nici avionul Concorde nici podul de la Tancarville nu ar fi fost posibile. Matematicile sunt deci indispensabile inginerului, o reformă în acest sens a predării matematicii fiind vitală, deoarece matematicile predate până în 1950 erau cu totul insuficiente. Pélegrin se arăta totuşi neliniştit de o anumită evoluţie posibilă întrebându-se ce se va întâmpla când, progresiv, problemele cu robinete şi cu trenuri şi rezolvarea ecuaţiei de gradul al doilea vor face loc studiului sistemelor de numeraţie în baza 5 sau 12. Pentru acei elevi care nu vor face studii superioare este oare cunoaşterea altor sisteme de numeraţie preferabilă posibilităţii de a rezolva o problemă cu trenuri care pleacă în sensuri opuse? Pélegrin se arată însă satisfăcut de introducerea în noile programe a noţiunilor relative la calculul matricial, a chestiunilor de logică (anterior predate numai studenţilor în filosofie) şi a tuturor chestiunilor relative la structuri, chestiuni fără de care nu pot fi înţelese sistemele complexe cu care este confruntat un inginer. Pélegrin mai subliniază importanţa pe care o prezintă, în formaţia unui inginer, noţiunile de calculul probabilităţilor (lumea industrială este de natură probabilistă),

de analiză numerică (pentru a şti să transferi calculele unui calculator) şi de logică formală (importantă în automatică). Dar toate aceste lucruri noi nu au dreptul să elimine „chestiuni care rămân de o manieră intrinsecă ale inginerului: calculul diferenţial şi integral, seriile convergente sau... regula de trei".

O critică directă şi detaliată a noilor manuale a venit din partea lui Jean Leray (*Les mathématiques modernes*, „Gazette des Mathématiciens", no. 64, octombrie 1971, p. 511), care mărturiseşte că articolul său, iniţial o improvizaţie orală la o discuţie care a avut loc la Institutul Henri Poincaré la 25 februarie 1971), s-a născut dintr-o întâmplare. Un elev a venit la el pentru a-i cere explicaţii în legătură cu următorul text aflat în manualul şcolar: „O mulţime finită (nevidă) E este prin definiţie imaginea bijectivă a unui segment [l, a] al mulţimii N a întregilor naturali. Două mulţimi finite au, prin definiţie, acelaşi cardinal dacă şi numai dacă ele pot fi puse în bijecţie. Se demonstrează tranzitivitatea relaţiei card (E) = card (F). Definiţie: Numărul a este cardinalul segmentului [l, a] al lui N". Leray observă că ultimul enunţ trebuie să aibă forma: „aplicaţia care asociază lui a pe card [l, a] este bijectivă; nu este vorba de o definiţie, ci de o consecinţă a axiomei (absentă din manual): o mulţime finită nu poate fi pusă în bijecţie cu nici o parte strictă a ei. Dar această omisiune făcea parte dintr-una mai generală: întregul text dedicat în manual mulţimilor finite nu se sprijină pe nici o proprietate caracteristică a întregilor sau a mulţimilor finite, putându-se deci aplica şi segmentelor din R şi mulţimilor infinite. Se „demonstrează" astfel că nu se pot pune în bijecţie două segmente de dreaptă decât dacă au aceeaşi lungime, ceea ce ar însemna, observă mucalit Leray, că orice hartă a Franţei este obligată de a avea dimensiunile Franţei. „Acestea sunt matematicile moderne", exclamă sarcastic Leray.

Aşa cum am arătat anterior, Leray nu s-a opus noilor programe; recunoaşte şi în articolul pe care-l discutăm acum că Lichnerowicz are idei sănătoase şi clare, că vrea să se postuleze ceea ce elevului îi apare evident iar fizicienii, chimiştii şi biologii să folosească în mod oportun şi corect termenii matematici. Dar cei care trebuiau să pună în practică aceste idei s-au descurcat mai greu. Astfel, observă Leray, este cu totul

nefericit ca primul exemplu de mulţime să fie o mulţime de... mulţimi (se cunosc dificultăţile logice asociate cu acest concept), iar al doilea exemplu să fie „mulţimea proprietăţilor unui obiect". Care este mulţimea proprietăţilor unui punct? se întreabă batjocoritor Leray. Postulatul lui Euclid nu este „un enunţ pe care nu ştim să-l demonstrăm", cum se spune în manualul incriminat, ci definiţia însăşi a geometriei euclidiene, observă Leray.

Concluzia lui Leray: în concepţia noilor manuale, matematicile moderne sunt o acumulare de definiţii ale unor noţiuni ale căror proprietăţi caracteristice (adică axiome) nu sunt enunţate şi despre care nu se stabileşte nici o proprietate importantă; astfel de noţiuni nu prezintă interes şi nu se poate raţiona logic cu ele. A le învăţa este un exerciţiu de memorie nociv inteligenţei. Nu aceasta au vrut autorii programelor, ei au cerut profesorilor de matematică să utilizeze cu bun simţ, atunci când împrejurarea o cere, termenii corecţi ai limbajului ştiinţific contemporan, chiar înainte ca sensul lor ştiinţific să poată fi riguros definit elevilor, printr-un sistem de axiome.

Este necesar să modernizăm învăţământul matematic, dar predarea „matematicilor moderne" este o iluzie, crede Leray, care constată că învăţământul superior va trebui în continuare să recomande multor studenţi: „Uitaţi ceea ce aţi învăţat la liceu".

Matematicienii provoacă pe fizicieni

Alfred Kastler, laureat al Premiului Nobel pentru fizică, a fost unul dintre criticii cei mai acerbi ai reformei învăţământului matematic francez. Preşedintele comisiei de reformă, matematicianul André Lichnerowicz, i-a răspuns printr-o scrisoare publică inserată în ziarul „Le Figaro", nr.8513, 27 ianuarie 1972, p.26), pe care o vom relata şi comenta în cele ce urmează.

Lichnerowicz îşi manifestă de la început adeziunea la ideea lui Kastler de a dezvolta la elevi observaţia concretului şi un anumit tip de imaginaţie, dar îi atrage atenţia lui Kastler că, în timp ce matematicienii lucrează de mai mulţi ani la o reformă a învăţământului matematic, nici o concepţie globală şi nici măcar sugestii nu au venit din

partea fizicienilor, în vederea unei reforme corespunzătoare a învăţământului fizicii. O comisie în acest sens, pentru fizică, a luat naştere cu mare întârziere, crearea ei fiind susţinută şi aprobată cu sprijinul puternic al matematicienilor. Fizicienii care făceau parte din această comisie au constatat, în 1971, că, în conţinutul său, învăţământul fizicii rămăsese substanţial acelaşi de 70 de ani, în contrast cu înnoirea pe care a cunoscut-o, în această perioadă, învăţământul chimiei şi al biologiei. În continuare, Lichnerowicz reproşează fizicienilor universitari francezi că, spre deosebire de colegii lor din alte ţări, s-au dezinteresat de problemele puse de învăţământul fizicii în licee. Gravitatea acestei situaţii este accentuată de faptul că învăţământul secundar a devenit, cel puţin în primul său ciclu, un învăţământ pentru toţi, pretinde Lichnerowicz, un învăţământ care se adresează unor copii care trăiesc într-o lume profund diferită de aceea din urmă cu 50 de ani. Electricitatea, de exemplu, face parte din viaţa cotidiană. Adolescentul de 16 ani pe care vrei să-l iniţiezi în „misterele" curentului continuu şi ale celui alternativ poate avea impresia că-ţi râzi de el; ar fi trebuit să-l iniţiezi mult mai devreme.

Lichnerowicz îl invocă în continuare pe fizicianul Pauli (laureat al premiului Nobel) care, referindu-se la învăţământ, observa că o idee ştiinţifică realmente nouă implică o reformă , care se constituie într-un nou pariu, un pariu reînnoit şi într-un viitor care urmează să fie constituit. Ştiinţa, observă Lichnerowicz, nu este o acumulare de straturi geologice disparate, provenind din epoci diferite; în procesul de iniţiere ştiinţifică, abordarea istorică (foarte des fals-istorică) este contraindicată, deoarece iniţierea în ştiinţă este altceva decât istoria ştiinţelor. Învăţământul fizicii îi apare lui Lichnerowicz (ca şi lui Kastler de altfel) învechit, deseori „livresc" şi insuficient de atent cu latura experimentală, cum de altfel şi Kastler o recunoaşte.

Faţă de o atare situaţie dezechilibrată a învăţământului ştiinţelor, Lichnerowicz accentuează responsabilitatea morală a savanţilor de a oferi tinerilor cheile lumii de azi şi de mâine.

Referindu-se la reforma învăţământului matematic francez, Lichnerowicz observă că în elaborarea noilor programe un rol deter-

minant l-au avut profesorii de liceu. Aceste programe nu exagerează aspectele abstracte, cum au afirmat unii fizicieni şi ingineri, ci pun accentul pe calculul numeric şi algebric, neglijat anterior. Multe critici la adresa noilor programe se datorează necunoaşterii naturii matematicii şi a rolului modelelor matematice în reprezentarea realului, crede Lichnerowicz, care îl invită pe Kastler să consulte, în acest sens, faimoasa carte a lui Albert Einstein *Geometria şi experienţa*. Ca orice ştiinţă, matematica include două discursuri: un discurs de creaţie, puţin vag, cuprinzând motivaţii şi observaţii, dominat de intuiţie şi de imaginaţie şi un discurs de comunicare, care-ţi permite să te faci înţeles de un altul în mod adecvat, fără denaturări sau ambiguităţi.

Această din urmă idee, pe care din păcate Lichnerowicz n-o dezvoltă mai mult, ni se pare de o considerabilă importanţă. Multe nemulţumiri la adresa noilor manuale au fost generate tocmai de un insuficient echilibru între cele două discursuri, discursul de comunicare tinzând să acapareze consideraţiile, în dauna discursului de creaţie. Desigur, Lichnerowicz are dreptate în a afirma că iniţierea în ştiinţă, trebuind să procedeze de la simplu la complex, se abate de multe ori de la ordinea istorică a lucrurilor; dar de aici până la eludarea ordinii istorice, cum se întâmplă de multe ori, este o distanţă mare. Nu este greu de văzut că între marginalizarea discursului de creaţie şi eludarea aspectului istoric este o legătură strânsă. Lichnerowicz este conştient de aceste lucruri; el observă că matematica nu-i o simplă colecţie de axiome, ci gândirea imaginativă şi creatoare de metode şi tehnici care se exprimă prin simboluri şi formule. Tocmai această gândire trebuie să încercăm s-o inoculăm copiilor, învăţându-i desigur să manipuleze şi tehnicile asociate. Experienţa arată – observă Lichnerowicz – că în măsura în care punem accentul pe tipul de gândire subiacent matematicii, tinerii arată şi ei mai mult interes pentru matematică. Matematicile sunt considerate abstracte pentru că sunt policoncrete, aplicându-se fără specificitate unor activităţi dintre cele mai variate, care cuprind o bună parte din civilizaţia noastră tehnică. În încheiere, Lichnerowicz îl întreabă pe Kastler: poţi fi de acord cu acel învăţământ matematic tradiţional (pe care şi tu l-ai primit) care lasă impresia că matematicienii

sunt doar oameni care judecă şi nu creatori, în ciuda faptului că ei au contribuit atât la inteligenţa umană, în particular, la înţelegerea lumii fizice?

În replică, M.Marck, preşedintele Uniunii Fizicienilor Francezi, consideră că problema reformei se pune altfel pentru fizică decât pentru matematică. Matematica şi-a restructurat înseşi bazele ei, ceea ce reclama, firește, o reconsiderare completă a programelor. După demolarea clădirii vechi, s-a construit alta nouă; lucru posibil, deoarece modificările erau pur conceptuale. Cu fizica şi chimia, lucrurile s-au petrecut altfel. În elaborarea programelor corespunzătoare, trebuie să se ţină seamă de realitatea fenomenelor naturale. Nu ne putem deci lipsi de fizica clasică, fie ea şi din secolul XIX-lea, deoarece ea realizase deja o cunoaştere foarte elaborată a unei mari părţi a fenomenelor fizice. În încheiere, să-i dăm cuvântul, pentru arbitraj, ilustrului savant Paul Germain, fost preşedinte al Oficiului naţional francez pentru cercetări aerospaţiale. Acesta consideră că trebuie creat de la începutul studiilor secundare (gimnaziul) un învăţământ general al ştiinţelor (matematică, fizică, chimie) şi adaugă: „Un atare învăţământ nu poate fi realizat decât dacă fizicienii se arată deschişi şi gata de a-şi revizui eventual unele metode de gândire... Matematicienii noştri s-au arătat poate prea novatori în concepţiile lor despre învăţământ, nu le rămâne fizicienilor decât a nu se arăta prea conservatori!".

Utilitatea gratuitului

Una dintre cele mai substanţiale contribuţii la dezbaterile privind modernizarea predării matematicii în şcoală aparţine lui René Thom, mare matematician francez, laureat al medaliei Fields (un fel de premiu Nobel pentru matematică), autor al teoriei matematice a catastrofelor, cu aplicaţii în biologie, lingvistică, economie şi numeroase alte domenii. Avem în vedere, în cele ce urmează, articolul publicat de René Thom în „L'Age de la Science", vol. 3, 1970, no. 3, p. 225-242 sub titlul foarte semnificativ: *Les mathématiques „modernes": une erreur pédagogique et philosophique?* A se vedea însă şi alte intervenţii ale aceluiaşi autor (cum ar fi: *Modern mathematics: Does it exist?* în

„Developments in Mathematical Education", editor A.G. Howson, Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1973).

René Thom compară mai întâi noile programe cu cele vechi şi constată că s-a creat un dezechilibru în sensul că algebra a căpătat o mare extindere, în dauna geometriei euclidiene tradiţionale. Două au fost în primul rând argumentele care au dus la eliminarea geometriei tradiţionale din programele franceze de matematică. Primul argument este teoretic: aşa cum rezultă din cercetările iniţiate de Hilbert, în legătură cu bazele geometriei, pretinsa rigoare a Elementelor lui Euclid este compromisă prin apelul frecvent la intuiţie. Al doilea argument este de natură practică: o mare parte din consideraţiile de geometrie plană, relative la triunghiuri şi la cercuri, este lipsită de utilitate. Cine are nevoie de dreapta lui Simpson sau de cercul celor nouă puncte al lui Euler?

Să urmărim pledoaria lui Thom pentru geometrie. În ceea ce priveşte lipsa de utilitate în viaţa de fiecare zi, Thom este de părere că nici algebra nu se află într-o poziţie mai favorabilă. Cine – se întreabă Thom – a avut nevoie, în viaţa curentă, să rezolve o ecuaţie de gradul al doilea sau să folosească explicit noţiunea de modul peste un inel? Desigur, s-ar putea replica aici că utilitatea trebuie apreciată în sensul perspectivei ştiinţifice oferite. Întrebarea legitimă ar fi nu de câte ori în viaţa practică am avut nevoie de dreapta lui Simpson sau de ecuaţia de gradul al doilea, ci în ce măsură aceste chestiuni intervin în viaţa internă a ştiinţei, a matematicii în primul rând. Va trebui atunci să recunoaştem că matematicienii care au avut nevoie, în profesia lor, de dreapta lui Simpson sunt incomparabil mai puţini (dacă nu cumva inexistenţi) decât cei care s-au întâlnit cu ecuaţiile algebrice şi cu noţiunea de modul peste un inel. Lipsa de perspectivă a multor chestiuni de geometrie plană nu poate fi contestată; dar nu toate noţiunile şi rezultatele geometriei plane se află în această situaţie. Nimeni nu poate contesta importanţa teoremei lui Pitagora, a formulelor care dau ariile şi perimetrele diferitelor figuri sau a diferitelor tipuri de transformări geometrice. Noile programe n-au preconizat eliminarea întregii geometrii; numai că partea care n-a fost eliminată a devenit, în bună măsură, un capitol de algebră liniară. Dar nu pe temeiul utilităţii ia

René Thom apărarea geometriei euclidiene. Mai general, el consideră că nu utilitatea este criteriul principal pe baza căruia trebuie selectate chestiunile care urmează să fie predate elevilor. Elementul decisiv în învăţământul şcolar este formarea gândirii, a aptitudinilor intelectuale şi morale. Aici, René Thom lansează o idee profundă şi subtilă, în jurul căreia va merita să întârziem. El consideră că este imposibil să formezi gândirea şi să dezvolţi iniţiativa elevului în cadrul unei discipline care nu include şi unele aspecte gratuite. Pentru a-i dezvolta personalitatea şi pentru a-l evalua corect, trebuie să-l plasezi într-un rol activ, în care să poată arăta care este spiritul lui de iniţiativă, cât de întreprinzător este. Toate acestea nu sunt posibile în cadrul unor elemente strict utilitare, deoarece utilitarul se asociază cu formula, cu reţeta, cu rutina, iar şcolarul excelează aici prin memorarea exactă şi rapidă a unui anume material. Valoare educaţională au acele chestiuni în care rămâne loc şi pentru joc, iar dintre toate jocurile geometria euclidiană i se pare lui Thom cel mai puţin gratuit şi cel mai bogat în semnificaţii, deoarece manifestă un remarcabil echilibru între aspectul logic şi cel intuitiv. Problemele de geometrie cer o combinaţie de timp, concentrare şi putere de asociere şi nu pot fi înlocuite cu structuri algebrice; pentru acestea din urmă nici nu există, la vârsta şcolară, o motivaţie adecvată, crede Thom. În continuare şi, în consecinţă, Thom consideră profund dăunătoare tendinţa actuală de a înlocui geometria cu algebra. La nivel de şcoală, probleme adevărate sunt numai cele de geometrie. Cele de algebră sunt simple exerciţii reclamând aplicarea oarbă a unor reguli şi proceduri prestabilite. Cu rare excepţii – continuă Thom – nu poţi cere unui elev să demonstreze o teoremă de algebră; dacă răspunsul nu este aproape evident, obţinându-se prin directa substituire a definiţiilor, atunci sunt mari şanse ca problema să depăşească, ca grad de dificultate, chiar posibilităţile elevului celui mai dotat. Singura matematică din care elevul învaţă într-adevăr ce este o teoremă şi ce este o demonstraţie rămâne geometria euclidiană tradiţională, conchide Thom.

Desigur, ştiinţa utilă tinde spre procedee algoritmice, deoarece numai în acest fel se poate folosi comod în mod repetat. Tot spre procedee algoritmice tinde şi procesul de predare a ştiinţei, pentru ca în

acest fel să se poată obţine uşor un randament oarecare chiar din partea elevului mijlociu sau slab şi să se poată uşor cuantifica şi ierarhiza, pentru a fi notate, răspunsurile elevilor la diferite teste şi examinări. Este geometria euclidiană singura disciplină şcolară care se poate sustrage de la această situaţie? Pe vremuri, matematica şcolară punea mult accent pe aritmetică, ale cărei virtuţi formative nu par inferioare geometriei. Există multe probleme privind numerele prime (începând cu teorema lui Euclid, care afirmă infinitatea lor), foarte echilibrate ca grad de dificultate şi care parcă oferă o perspectivă mai interesantă decât dreapta lui Simpson şi cercul celor nouă puncte. Nici din algebra şcolară nu lipsesc problemele nici triviale nici prea grele (de exemplu, punerea în ecuaţie a unei situaţii practice). Mai sunt apoi combinatorica, grafurile, probabilităţile şi multe altele. René Thom are dreptate dacă ne raportăm la ceea ce se întâmplă de fapt, nu şi în principiu. Posibilităţile formative ale matematicii şcolare sunt departe de a fi folosite în mod corespunzător.

Geometrie, nu pleca!

René Thom explică succesul istoric al Elementelor lui Euclid prin faptul că geometria euclidiană este primul exemplu de transcriere a unei proceduri spaţiale bi- sau tri- dimensiuonale în limbajul scris unidimensional. Geometria euclidiană se aplică, prin aceasta, unei situaţii precise, prezentă în limbajul de fiecare zi. Funcţia de bază a limbajului ordinar este, în ultimă instanţă, de a descrie procesele spaţio-temporale care ne înconjoară şi a căror topologie este transparentă în sintaxa propoziţiilor care le descriu (René Thom, *Topologie et linquistique*, în „Essay on Topology and Related Topics", André Haefliger and Raghavan Nerasimham eds.; *Mémoires dédiés á Georges de Rham*, Springer Verlag., New York, 1970, p.226-248). În geometria euclidiană avem a face cu aceeaşi funcţie a limbajului, dar de această dată grupul de echivalenţe care operează asupra formelor este un grup Lie, grupul metric, în contrast cu grupurile care descriu invarianţa topologică a reprezentării, permiţând recunoaşterea unor obiecte ale lumii exte-

rioare, aşa cum sunt ele descrise de denumirile lor în limba naturală.

Pentru René Thom, geometria este un intermediar natural, probabil de neînlocuit, între limbajul ordinar şi formalismul matematic, unde fiecare obiect este redus la un simbol iar grupul de echivalenţe se reduce la identitatea simbolului scris cu el însuşi. Din acest punct de vedere, stadiul marcat de gândirea geometrică nu poate fi omis în nici o dezvoltare normală a activităţii umane raţionale. În ultimii 60 de ani s-a pus un accent deosebit pe reconstrucţia conţinutului geometric, pornindu-se de la numerele naturale şi folosindu-se teoria tăieturilor lui Dedekind sau completarea corpului de numere raţionale. Thom vede în conţinutul geometric o entitate primordială, atât din punct de vedere psihologic cât şi din punct de vedere ontologic. Dacă reuşim să conştientizăm anumite lucruri, atunci acestea sunt în primul rând spaţiul şi timpul; dar percepţia continuităţii geometrice este, într-un anumit sens, inerentă oricărui proces de conştientizare, crede Thom.

Treptat însă, conţinutul geometric, iniţial omogen şi amorf, se structurează, instrumentul cel mai important în acest sens constituindu-l grupul geometric, care permite introducerea discontinuităţii şi a operaţiilor discrete. Procedura, ca atare, este însă foarte sofisticată. Abia în timpurile moderne a reuşit matematica să se întoarcă la sursele ei continue, întemeind astfel topologia, prin care s-a eliberat de dominaţia grupului metric. Nefiind nici metrică, nici cantitativă, topologia este fundamental calitativă şi nu se poate sprijini decât pe simbolismul discret al unui limbaj semiformalizat. Invarianţii topologici, cu rădăcini mai adânci, sunt mai greu accesibili, din punct de vedere conceptual, decât invarianţii metrici. Ne dăm astfel seama că trecerea de la gândirea de fiecare zi la gândirea formalizată are ca intermediar natural gândirea geometrică. Acesta a fost, de-a lungul istoriei, itinerarul gândirii umane şi, dacă acordăm credit legii lui Haeckel, după care ontogenia repetă filogenia, cu alte cuvinte dezvoltarea individului repetă evoluţia speciei, trecând, în esenţă, prin aceleaşi stadii, atunci trebuie să admitem că dezvoltarea gândirii umane raţionale parcurge itinerarul gândire ordinară – gândire geometrică – gândire formalizată.

O abordare în sens invers, de la individ la specie, prin descifrarea

filogeniei cu ajutorul ontogeniei, se află la S.T. Parker şi K.R. Gibson (*A developmental model of the evolution of language and intelligence in early hominids*, „Behavioral and Brain Sciences", vol.2, 1979, p. 367-381). Aceştia au studiat modalitatea prin care copiii dobândesc diferite tipuri de îndemânări, culminând cu gândirea conceptuală; pe baza ei intenţionau să stabilească, în virtutea legii lui Haeckel, procesul prin care hominoizii şi omul primitiv au evoluat spre gândirea conceptuală. Ar fi interesant de confruntat ipoteza lui Thom (privind rolul gândirii geometrice în această evoluţie), cu rezultatele sau sugestiile cercetărilor întreprinse de Parker şi Gibson. Să observăm totuşi, împreună cu Mario Bunge (*Philosophical problems in linguistics*, Erkenntnis, vol. 21, 1984, p. 107-173, în special p.144), că legea lui Haekel trebuie luată cu aproximaţie; nou-născuţii nu au un sistem nervos matur şi nu trebuie să-şi apere existenţa în luptă cu animalele sălbatice şi cu alte adversităţi ale mediului, aşa cum era cazul cu omul primitiv.

Geometria euclidiană a fost sacrificată nu numai în Franţa, ci şi în alte ţări, de exemplu în Anglia, fapt care a provocat reacţia unui alt mare geometru, Michael Atiyah (la Conferinţa Internaţională de Educaţie Matematică din 1976). Mai recent, un matematician de la Polytechnic of the South Bank, din Londra, Ramesk Kapadia, a susţinut o teză de doctorat privind importanţa pedagogică a geometriei euclidiene şi a publicat un articol în acest sens (*Bring back geometry*, „The Mathematical Intelligencer, vol. 7, 1985, no. 2, p.53, 54, 65). Kapadia susţine că nu există domeniu mai adecvat decât geometria euclidiană pentru a le explica elevilor în ce constă gândirea deductivă, gândire care s-ar afla în inima matematicii şi ar separa matematica de orice altă disciplină. Nu avem gândire deductivă şi în aritmetică sau în combinatorică? Da, recunoaşte Kapadia, dar geometria are avantajul de a face apel la desene şi figuri care facilitează sesizarea unei probleme ca un întreg. Acest suport vizual este foarte important în educaţia matematică a copilului. Kapadia invocă faptul că, atât din punct de vedere matematic cât şi istoric, geometria euclidiană şi merită un loc în programele şcolare. Influenţa ei se exercită mult dincolo de graniţele matematicii, fiind primul şi cel mai important exemplu de sistem

deductiv. Geometria euclidiană este o parte esenţială a moştenirii culturale. Axiomele ei sunt acceptabile intuitiv; chiar în ceea ce priveşte postulatul paralelelor, cei mai mulţi se arată surprinşi la ideea că el ar putea să nu fie satisfăcut. Problemele de geometrie sunt de o mare varietate şi de grade de dificultate mergând de la banale la foarte grele, ceea ce permite antrenarea totalităţii elevilor. Desigur, nu e nici posibil nici de dorit să se predea toate cărţile lui Euclid. Kapadia este de părere că rezultatele din primul volum al *Elementelor*, privitoare la triunghiuri, pot fi studiate experimental. Volumul al treilea, dedicat cercului, se pretează cel mai bine unui tratament deductiv.

De fapt, esenţa pledoariei lui Kapadia are în vedere importanţa figurilor şi desenelor în educaţia matematică a copiilor, în ciuda faptului că multe rezultate din ultima sută de ani, mai cu seamă în Analiza matematică, s-au dovedit a fi în contradicţie cu intuiţia vizuală comună. Totuşi, crede Kapadia, în cele mai multe cazuri figurile şi desenele ne orientează în direcţia cea bună. Prin înlocuirea geometriei cu algebra, suportul vizual al matematicii şcolare a slăbit considerabil. Îl putem recupera şi altfel decât aducând înapoi geometria?

René Thom despre rigoare

Una dintre obiecţiile majore aduse geometriei euclidiene, pentru a se justifica scoaterea ei din programa şcolară de matematică, se referă la insuficienta rigoare pe care ea ar prezenta-o în raport cu exigenţele matematicii actuale. Desigur, cel puţin în ultima sută de ani, geometria euclidiană a fost predată în şcoala în versiuni mai riguroase decât aceea din cărţile lui Euclid. După cum s-a mai remarcat, textul lui Euclid nici nu are calităţi didactice deosebite. În adaptarea pentru învăţământ a *Elementelor* lui Euclid, un rol important l-au avut Clairaut în Franţa şi Felix Klein în Germania. Dar chiar şi cu aceste adaptări, nu este atins nivelul de rigoare preconizat ulterior de David Hilbert, care a impus o nouă concepţie privind axiomatizarea geometriei. Experimente privind introducerea în şcoală a unor axiomatici moderne ale geometriei nu au lipsit nici la noi în ţară, dar nu despre aceasta vrem să discutăm acum.

Ne propunem ca, pornind de la ideile lui René Thom, să examinăm problema delicată a rigorii în matematică şi în ştiinţă în general.

René Thom constată mai întâi că încercarea de a înlocui geometria euclidiană şcolară cu o versiune acceptabilă a axiomaticii propuse de Hilbert a eşuat datorită complexităţii acesteia din urmă. Punând, de o manieră mai generală, problema rigorii matematice, Thom distinge trei atitudini posibile. Prima atitudine este identificarea rigorii cu ideea de formalizare, aşa cum a fost ea elaborată de Hilbert în deceniile al doilea şi al treilea ale secolului trecut. Din acest punct de vedere, un raţionament este riguros dacă procedează în cadrul unui sistem formal S definit cu ajutorul unei colecţii de termeni, al unei colecţii de relaţii şi al unei mulţimi R de reguli de deducţie. O parte din relaţii constituie axiomele sistemului S. O relaţie este o teoremă în S dacă se poate obţine pornindu-se de la o axiomă, prin aplicarea de un număr finit de ori a unor reguli din R.

Acesta este tipul de rigoare acceptat azi de cei mai mulţi matematicieni. Ceea ce interesează într-un sistem formal este corectitudinea deducţiei, deci aspectul pur sintactic. Aici se potriveşte faimoasa vorbă de spirit a lui Bertrand Russell: „Matematica este domeniul în care nu ştim niciodată despre ce este vorba, nici dacă ceea ce spunem este adevărat". Într-adevăr, într-un sistem formal „nu ştim despre ce este vorba" în sensul că nu este necesar să se precizeze natura termenilor şi a relaţiilor, ci numai regulile lor de concatenare.

În axiomatizarea pe care o propune pentru geometrie, Hilbert pleacă la drum cu trei mulţimi; elementele primeia le numeşte *puncte*, ale cei de a doua *drepte* iar pe ale cei de a treia *plane*. Dar, după aceasta, Hilbert adaugă: „Trebuie să fim în stare în orice moment să spunem *mese* în loc de *puncte, scaune* în loc de *drepte* şi *halbe de bere* în loc de *plane*". Desigur, prin aceasta Hilbert ne atrage atenţia că în axiomatizarea sa punctele, dreptele şi planele sunt introduse pe cale pur sintactică; nu natura lor intervine, ci modul în care ele intră în relaţie.

Dar pentru a înţelege acest regim relaţional, situaţional al punctelor, dreptelor şi planelor, deci pentru a înţelege modul în care au fost descoperite axiomele care le guvernează, este bine ca atunci când

Hilbert se referă la puncte, drepte şi plane, să ne gândim chiar la puncte, drepte şi plane. Situaţia este deci diferită de aceea a pieselor de şah. Denumirile acestora sunt lipsite de o bază intuitivă sau, cel mult, dacă o astfel de bază există, ea este slabă. Ceea ce individualizează o piesă de şah este exclusiv modul în care se operează cu ea; materialul din care este ea făcută, forma, mărimea şi denumirea ei sunt pur convenţionale, iar modul în care se operează cu ea nu este motivat de o experienţă intuitivă anterioară.

Deducţiile pot fi corecte sau nu în raport cu convenţiile din S, dar adevărul unei teoreme, în măsura în care presupune o confruntare cu situaţii din afara sistemului S, nu coincide cu corectitudinea ei. De exemplu, dacă luăm ca axiomă relaţia „Trei este mai mic decât doi", atunci, prin aplicarea regulii conform căreia o inegalitate se păstrează când în ambii membri se adaugă acelaşi număr, se obţine teorema „Patru este mai mic decât trei", teoremă corectă în sistemul formal adoptat, dar neadevărată în raport cu unele situaţii din afara sistemului. Proiectul lui Hilbert era de a funda, cu ajutorul sistemelor formale, ideea de demonstraţie, compromisă anterior prin apariţia paradoxurilor teoriei mulţimilor. Dar acest proiect a primit o lovitură serioasă în 1931, când Kurt Gödel a arătat că încercarea de a formaliza aritmetica eşuează atâta vreme cât dorim ca sistemul formal obţinut să fie şi complet (adică să includă întreaga aritmetică) şi necontradictoriu. Dar, deoarece această teoremă a lui Gödel nu poate fi prezentată aici (a se vedea, totuşi, o demonstraţie a ei în lucrarea noastră *Paradoxul*, Editura Albatros, 1984) şi nu trebuie acceptată pe credit, vom recurge la un anume mod de a sugera un dezavantaj al rigorii ca sistem formal. René Thom ne invită să ne imaginăm un sistem formal S sub forma unei maşini electronice M capabilă să efectueze cu o viteză fantastică deducţiile din sistemul S. Să presupunem că despre o anumită formulă F maşina M stabileşte, prin efectuarea a 10 la puterea 30 operaţii elementare (totul petrecându-se în câteva secunde), că este o teoremă în sistemul S. Care matematician va accepta fără ezitare validitatea unei astfel de „demonstraţii", dată fiind imposibilitatea de a-i verifica toţi paşii? (Să observăm că, ulterior momentului în care Thom a imaginat

această situaţie, demonstrarea teoremei celor patru culori cu ajutorul calculatorului a confirmat îngrijorarea lui Thom). Dezavantajele atitudinii formaliste faţă de rigoare au fost argumentate şi de G.Kreisel (*The formalist-positivist doctrine of mathematical precision in the light of experience*, L'Age de la Science, vol.3, 1970, p.17-46).

A doua atitudine posibilă faţă de rigoare este numită de Thom empirică sau sociologică şi constă în a accepta o demonstraţie ca riguroasă dacă ea obţine adeziunea specialiştilor de frunte ai domeniului căruia ea îi aparţine. În ciuda caracterului său vag, acest mod de a vedea rigoarea i se pare lui Thom cel mai acceptabil. „O demonstraţie este riguroasă dacă obţine adeziunea tuturor cititorilor cu pregătirea corespunzătoare pentru a înţelege". Aceasta revine, pentru Thom, la înţelegerea tuturor simbolurilor folosite şi la cunoaşterea regulilor lor de folosire. Din acest punct de vedere, rigoarea îi apare lui Thom ca o proprietate esenţial locală a raţionamentului matematic. Pentru a aprecia validitatea unui raţionament, nu e nevoie de nici o structură axiomatică specială şi de nici un fel de maşină conceptuală (cum ar fi sistemul formal); este suficient să înţelegi semnificaţia simbolurilor folosite şi să ai o idee clară despre modul lor de combinare, crede Thom.

Dar poate că o imagine şi mai clară despre felul în care vede Thom problema rigorii rezultă din următoarele două afirmaţii ale sale: 1. Contrariul rigorii este imprecizia; 2. Nu există o definiţie riguroasă a rigorii. Dacă cea de a doua afirmaţie nu trezeşte nici o îndoială, prima merită să fie discutată. O vom face în continuare, discutând şi cea de a treia atitudine posibilă faţă de rigoare.

Această atitudine constă în adoptarea punctului de vedere al lui Platon, pentru care entităţile matematice au o existenţă independentă de gândirea noastră, sub forma unor idei absolute. O propoziţie P este adevărată dacă exprimă o relaţie între idei de acest fel, cu alte cuvinte dacă este o idee de ordin superior care structurează un grup de idei aflate în subordinea ei. O atare atitudine nu a găsit mulţi adepţi, deoarece ridică dificultăţi evidente, de natură ontologică. În ceea ce priveşte situarea rigorii în opoziţie cu imprecizia, este uşor de văzut că

acest deziderat este cel mai bine satisfăcut de conceperea rigorii ca formalizare. Atitudinea pragmatică preferată de René Thom riscă să imprime rigorii un coeficient de subiectivitate.

În ce constă criza matematicii?

Nu încape îndoială că printre problemele globale ale omenirii se află și știința. Dar știința are, la rândul ei, propriile sale probleme globale și una dintre acestea este matematica. De fapt, matematica a devenit o problemă globală nu numai a științei, ci a întregii culturi; expansiunea interdisciplinară a matematicii este o mărturie în acest sens.

Dar, așa cum globalizarea unor probleme fundamentale ca cele privind energia și ecologia a dus la tot atâtea crize la nivel planetar, creșterea razei de acțiune a matematicii și a răspunderilor ei față de societate (ca și ale societății față de ea) este confruntată cu o criză pe care o parcurg relațiile matematicii cu lumea de azi.

Vom numi acest fenomen „criza matematicii", dar trebuie să fie clar, de la început, că nu este vorba de o criză internă, de creștere, a matematicii, deși unele fenomene patologice, pe care le discutăm în alte secțiuni ale lucrării de față, se manifestă și aici. Din punctul de vedere al vieții ei interne, matematica progresează impetuos, după cum o arată revistele, cărțile și diferitele manifestări de specialitate. Vitalitatea matematicii este tot mai mare, se dezvoltă noi și noi domenii, apar probleme noi, unele deosebit de grele și de interesante. Criza la care ne referim are în vedere raporturile matematicii cu societatea, cu publicul, cu învățământul, cu ansamblul culturii umane. Este vorba de o criză de receptare și de utilizare a matematicii, de transmitere a ei de către noile generații. Desigur, această criză nu poate rămâne fără consecințe asupra vieții interne a matematicii.

Conștientizarea nevoii de matematică

Fără îndoială, este întrucâtva paradoxală această situație. Nu se vorbește oare de un număr bun de ani despre pătrunderea matematicii peste tot, despre faptul că nu mai rămân aproape nici un domeniu, nici

o sferă de activitate socială care să nu fie afectate de gândirea matematică? Într-adevăr, aşa este, numai că această expansiune a matematicii se manifestă la nivelul cercetării şi al posibilităţilor, în timp ce dificultăţile apar atunci când este vorba de implementarea gândirii, a metodelor şi rezultatelor matematicii în învăţământ, în industrie, în agricultură, în planificare şi organizare, în cultură. Dificultăţile apar, de asemenea, în ceea ce priveşte capacitatea societăţii de a conştientiza şi de a explicita nevoia ei de matematică, de a formula problemele pe care le adresează matematicii, ca şi în ceea ce priveşte capacitatea matematicii de a sesiza problemele matematice ascunse în atâtea şi atâtea întrebări grave pe care le formulează tehnica, economia, cultura, viaţa de fiecare zi.

Dacă nu la nivelul aplicaţiilor practice, în industrie sau agricultură, cel puţin la nivelul contactelor cu celelalte discipline, viaţa ştiinţifică şi culturală trebuie să se prevaleze de capacitatea explicativă deosebit de profundă a unor modele algebrice, geometric şi analitice. Să dăm un singur exemplu. Funcţia logaritmică, apărută iniţial în legătură cu simplificarea operaţiilor aritmetice, s-a dovedit esenţială în exprimarea unităţii de măsură pentru intensitatea sunetelor, în studiul entropiei fizice şi informaţionale, în formularea legii lui Weber şi Fechner privind relaţia dintre senzaţie şi excitaţie, în metoda carbonului radioactiv (esenţială în datarea unor evenimente geologice şi arheologice) şi în analogul ei lingvistic (metoda glotocronologiei), în studiul timpului psihologic şi social (care, într-o anumită concepţie, este logaritmul timpului cronologic); pentru a nu mai vorbi de faptul că, chiar în interiorul matematicii, funcţia logaritmică domină domenii importante, cum ar fi teoria numerelor prime. Această formidabilă capacitate a funcţiei logaritmice de a modela fenomene din discipline atât de variate nu trebuia oare să fie sesizată în adevărata ei semnificaţie culturală şi filosofică? După cum se poate vedea, aceasta nu s-a întâmplat.

Să încercăm să aprofundăm această situaţie, să înţelegem sursa acestor anomalii. Matematica devine tot mai abstractă şi mai complexă, se transformă tot mai repede, tehnicile ei devin tot mai complicate, jargonul ei tot mai special. În acest sens se poate spune că ea „se

aristocratizează" tot mai mult. Chiar obiecul ei este controversat, matematicienii, ca şi filosofii, nu se înţeleg asupra modului în care trebuie definită matematica. Suntem departe de vremea în care matematica se reducea la studiul relaţiilor cantitative şi al formelor spaţiale din lumea înconjurătoare. Universurile imaginare ale matematicii le concurează azi pe cele ale artei.

Dar această „evadare" a matematicii nu este decât rezultatul evoluţiei procesului de cunoaştere. Excelând în dezvoltarea posibilităţilor sale de cunoaştere, matematica a înregistrat însă mai puţine succese în dezvoltarea posibilităţilor sale de comunicare cu potenţialii beneficiari. Invadând mai toate domeniile de activitate, matematica ar fi trebuit să devină din ce în ce mai „democratică", mai populară, mai accesibilă şi mai agreabilă. Limbajul ei ar fi trebuit să fie deprins cu convingere şi cu plăcere de către mai toţi cetăţenii, şi în special de către tineri. Acest lucru nu prea se întâmplă.

Aşadar, în acest dialog insuficient al matematicii cu celelate domenii, cu societatea în ansamblul ei, se află sursa crizei la care ne referim. Desigur, ar fi greşit să se creadă că matematicienii nu şi-au pus această problemă. Nu numai că şi-au pus-o, dar au şi obţinut unele rezultate remarcabile. colaborarea matematicii cu atâtea şi atâtea alte domenii, cu industria şi cu agricultura, cu medicina şi cu lingvistica, cu economia şi cu ingineria, cu sociologia şi cu muzica este rezultatul unor eforturi atât din partea matematicienilor, cât şi a nematematicienilor. Numai că rezultatele obţinute sunt mult inferioare nevoii obiective de matematică pe care societatea o are acum, ca şi posibilităţilor reale pe care matematica actuală le oferă. Din păcate, societatea, prin instituţiile ei, nu reuşeşte încă să conştientizeze această nevoie crescândă de matematică.

Îngrijorarea care se manifestă în rândul matematicienilor – mai cu seamă al celor care sunt interesaţi în procesul de învâţământ matematic şi în relaţiile matematicii cu publicul, cu potenţialii ei beneficiari – este vizibilă, ea s-a manifestat puternic la unele congrese internaţionale de educaţie matematică şi la ultimele congrese internaţionale ale matematicienilor. O carte intitulată *Matematica mâine* (editată de L.A. Steen

la Springer Verlag, New York, 1981) aduce în atenţie punctele de vedere ale mai multor specialişti în ceea ce priveşte dezvoltarea matematicii. Chiar titlurile unora dintre studiile care alcătuiesc acest volum constituie o provocare adresată cititorului şi ne lasă să bănuim caracterul ei profund polemic, născut dintr-o adâncă nemulţumire: „Matematica aplicată este o matematică rea"; „A rezolva ecuaţii nu este tot una cu a rezolva probleme"; „Citiţi-i pe maeştri"; „Când matematica devine propagandă"; „Adevărata criză energetică"; „Femeile şi matematica"; „Declinul analizei şi creşterea matematicii discrete"; „Cum să vindem matematica?".

Inteligenţa umană şi formarea gândirii matematice

Toate prognozele privind următoarele decenii sunt de acord asupra nevoii crescânde de tehnică şi de gândire matematică. Dar nici una nu este în stare să detalieze această idee generală. Una dintre dificultăţi constă în aceea că nu suntem încă în stare să precizăm interacţiunile matematicii cu celelate discipline, ale matematicii cu societatea; în consecinţă, nu ştim să evaluăm dependenţa de matematică a viitoarelor profesii. Dar este cert că problemele privind mediul ambiant, energia, eficienţa producţiei, planificarea, decizia, prognoza, informaţia, comunicarea nu vor putea fi abordate fără o matematică adecvată.

Despre rolul matematicii într-un domeniu sau altul s-a scris mult şi nu ne propunem aici să insistăm asupra acestei chestiuni. Dar dacă problemele grave care stau în faţa omenirii reclamă un tip nou de învăţare, creativă, prospectivă şi participativă, atunci este vital să înţelegem că chestiunea principală este aceea a formării gândirii matematice, ca o componentă esenţială a inteligenţei umane. Gândirea matematică, azi, înseamnă, deopotrivă, gândirea algoritmică şi combinatorie, deductivă şi probabilistă, analogică şi generalizatoare, inductivă şi sistemică. Înţelegem oare cum se vor schimba poimâine economia şi cultura ţării noastre dacă mâine vom reuşi să creăm fiecărui elev accesul la internet? Explozia de inteligenţă şi fantezie stimulată în acest fel ar putea avea efectul descoperirii unor noi surse de energie.

În această ordine de idei este, credem, interesant punctul de vedere al unui autor important, la care ne vom referi în cele ce urmează.

Atenţie la calculator!

„Atenţie la calculator! Limbajul său intoxică creierul!" Cu acest semnal de alarmă, suplimentul *Tutto libri* al ziarului italian „La Stampa" (nr.443, din 2 martie 1985) se adresează cititorilor, prezentându-le punctul de vedere al lui Joseph Weizenbaum, considerat unul dintre pionierii informaticii. Aflat în Elveţia cu prilejul apariţiei uneia dintre cărţile sale, Weizenbaum a răspuns la întrebările lui Claudio Pozzoli în legătură cu impactul social al informaticii şi, mai ales, în legătură cu educaţia informatică a copiilor. Emigrat la vârsta de 13 ani în S.U.A. (venind din Berlin), Weizenbaum a fost foarte activ în răspândirea informaticii în S.U.A. Într-o carte importantă (*Computer Power and Human Reason*, W.H. Freeman, San Francisco, 1976), Weizenbaum s-a ridicat împotriva acelui tip de programare în care partea tehnică ucide partea de cunoaştere. Tocmai în acest sens el a considerat necesar să intervină într-un moment în care educaţia informatică a copiilor este la ordinea zilei, preconizându-se câte un calculator pe pupitrul fiecărui şcolar. Dar dotarea materială nu este suficientă; mai este nevoie de un sistem adecvat de învăţământ şi de pregătirea corespunzătoare a cadrelor de predare.

Faţă de tendinţa tot mai pronunţată de a se face educaţia informatică a copiilor încă de la vârsta preşcolară (a se vedea răspândirea jucăriilor informatice şi a revistelor de mare tiraj dedicate calculatoarelor), Weizenbaum consideră că înainte de vârsta de 14 ani nu este oportun contactul cu calculatorul. Prin aceasta, el se plasează într-o poziţie destul de singulară, deoarece cei mai mulţi informaticieni, pedagogi şi psihologi consideră că deprinderea de a lucra cu calculatorul poate şi trebuie să fie realizată de la cea mai fragedă vârstă. Desigur, pentru copil aspectul ludic al calculatorului este singurul reţinut, dar potenţialul său formativ nu trebuie subestimat.

Sensul acestor idei ale lui Weizenbaum trebuie raportat la cele dez-

voltate în cartea sa din anul 1976, pe care am semnalat-o mai sus. De acord cu folosirea calculatorului în numeroase activităţi auxiliare, Weizenbaum se desparte de calculator de îndată ce se încearcă utilizarea sa ca un substituent al gândirii umane. Nu a pregetat să facă elogiul calculatorului într-o carte intitulată *A scrie cu calculatorul*, unde arată avantajele utilizării calculatorului în elaborarea şi redactarea unui articol sau a unei cărţi. Dar aici este vorba de a recurge la o maşină de scris mai perfecţionată decât cea tradiţională şi la un video; gândirea propriu-zisă a autorului este anterioară acestei utilizări şi nu e contaminată de ea, crede Weizenbaum. Nu este deci vorba de o respingere a tehnicii noi. Calculatorul face parte organică din lumea noastră, ca şi aspiratorul de praf şi automobilul. Pe toate trebuie să învăţăm să le folosim, deci trebuie să cunoaştem funcţionarea lor Există însă o limită în această folosire. Distorsiunile apar din momentul în care psihicul uman, în ceea ce are el mai specific, este supus unui tratament automat; o expresie tipică în acest sens este, pentru Weizenbaum, aşa-numita psihoterapie automată, în cadrul căreia dialogul medicului cu pacientul este... automatizat.

Primejdii în folosirea calculatoarelor

Există unele primejdii majore în folosirea calculatoarelor? Unii factori de decizie evită să-şi asume răspunderile ce le revin, răspunderi pe care le transferă... maşinii, posibilităţilor ei reduse; de vină, în anumite situaţii, n-ar mai fi oamenii, ci calculatoarele, care nu au atins încă anumite performanţe şi care mai şi greşesc uneori. Nu citim uneori în presă despre astfel de întâmplări? În aceste condiţii, nu ne-am putea trezi, într-o bună zi, că tot dintr-o eroare a calculatorului s-a declanşat al treilea război mondial?

Recunoscând necesitatea introducerii în şcoală a calculatoarelor, Weizenbaum atrage atenţia asupra unei probleme de prioritate. Înainte de a învăţa limbajul calculatorului, elevul trebuie să înveţe să gândească şi să se exprime cu precizie în limba sa maternă, atât oral cât şi în scris; să înveţe, în această limbă, literatură şi matematică, chimie şi

istorie. Weizenbaum se referă la experienţa negativă a şcolii americane care, introducând prea devreme calculatoarele şi îndreptând asupra lor o atenţie exagerată, a îndepărtat pe mulţi elevi de la unele îndatoriri fundamentale, în primul rând de a se exprima şi de a scrie corect. Să fie aici una din rădăcinile analfabetismului funcţional de care suferă o parte a societăţii americane? Copiii învaţă să scrie şi să citească, dar unii, într-un mod atât de superficial, încât nu sunt în stare să consulte orarul autobuzelor sau să redacteze o cerere către o instituţie.

Calculatorul nu rezolvă toate problemele. Weizenbaum propune următorul criteriu: calculatoarele sunt utile numai în acele şcoli care ar rămâne şcoli bune chiar dacă s-ar renunţa la calculatoare. Cât despre tipul de calculator şi limbajul de programare adecvat? Depinde de împrejurări. Automobilul cel mai bun pentru Alaska nu este optim şi pentru Sahara.

Antrenamentul ludic anticipează gândirea algoritmică

Desigur, folosirea calculatoarelor trebuie pregătită printr-o educaţie corespunzătoare, prin jocuri combinatoriale, strategice şi algoritmice, diferenţiate după vârste. Prin menţinerea unei distanţe mari între ceea ce promite şi ceea ce oferă, între efortul pretins şi recompensa acordată, prin eludarea caracterului ludic pe care-l presupune orice proces de învăţare, până la o anumită vârstă, matematica şcolară – în ciuda unor progrese în chestiuni de corectitudine şi rigoare, de modernizare a tematicii şi limbajului – ar putea intra într-un relativ impas.

Influenţa calculatorului elecronic asupra dezvoltării matematicii în ultimele decenii a fost imensă. Un spirit nou, o problematică nouă, accente noi au apărut până şi în cele mai vechi şi venerabile discipline matematice, ca să nu mai vorbim despre noile discipline, create ca urmare a dezvoltării calculatoarelor electronice. Nu este aici locul de a intra în detalii, dar este semnificativă constatarea lui E.P. Miles jr. (în cartea *Matematica mâine*, menţionată anterior) după care faptul că în S.U.A departamentele de informatică sunt separate de cele de matematică reprezintă o consecinţă a incapacităţii multor departamente de

matematică de a-şi încorpora, ca o nouă componentă, informatica.

Desigur, informatica nu este numai matematică, ea are o importantă componentă inginerească, dar, sub aspectul gândirii pe care o promovează şi pe care o presupune calculatorul electronic, aceasta se reclamă, în primul rând, de la matematică. Formarea unei astfel de gândiri ar trebui să înceapă de la vârsta de 3-4 ani, cu ajutorul unor jocuri adecvate, ce-l introduc pe copil în funcţionarea de tip algoritmic, ca şi prin observarea mediului înconjurător, care abundă în obiecte de tip maşină, cu reguli care conduc de la anumite intrări la anumite ieşiri. Această preocupare ar trebui să existe în întregul învăţământ (primar, gimnazial, liceal şi superior) şi la toate disciplinele şcolare, deoarece gândirea informatică este esenţială în învăţarea matematicii şi în aceea a gramaticii, în inginerie şi în economie, în planificare şi contabilitate, în muzică şi sport.

În acest sens, o importanţă mare o au tipurile de jocuri propuse copiilor, structura revistelor rebusiste, unele rubrici distractive din reviste, din programele de radio şi televiziune. Oare aceste canale de comunicare cu publicul, în special cu tineretul, n-ar putea fi folosite într-o mai mare măsură pentru dezvoltarea gândirii problematice şi strategice, combinatoriale şi algoritmice? Enunţarea unei probleme atrăgătoare, în pauza de un minut dintre două emisiuni organizarea unor mici concursuri ar putea stimula pe tineri (şi oare numai pe ei?) să se orienteze spre anumite preocupări atât de importante în societatea de mâine.

Modernizarea predării matematicii a fost uneori înţeleasă unilateral, sub aspectul exclusiv al formalismului matematic, al limbajului şi simbolismului de ultimă oră. Din acest punct de vedere, introducerea, la un moment dat, a mulţimii vide la clasa întâi este tipică, pentru un întreg stil care ignoră tot ceea ce psihologia învăţării a acumulat (în particular, dezvoltarea stadială a copilului, cu contribuţiile atât de importante ale lui J. Piaget). Potenţialul educaţional al matematicii a fost uneori considerabil redus prin eludarea aspectelor genetice, istorice, culturale şi interdisciplinare. În acest fel, izolarea socială a matematicii devenea inevitabilă.

CAPITOLUL VIII
O VECINĂ ȘI SORĂ A JOCULUI: GREȘEALA

Trei feluri de greșeli

Încercarea de folosire a dicționarului, pentru a ne lămuri ce este greșeala, se dovedește insuficientă. Ca în multe alte cazuri („jocul" este și el un exemplu elocvent în această privință), noțiunea de greșeală nu poate fi epuizată printr-o definiție. Să încercăm să recurgem și la un alt procedeu, întrebându-ne care este opusul epitetului „greșit". Vom constata imediat că ne aflăm în fața unui repertoriu bogat de variante, din care reproducem aici câteva: *corect, adevărat, just, drept, real, normal* (ne orientăm și după *Dicționarul explicativ al limbii române*). Observăm imediat că prima variantă este de natură predominant sintactică, vizează respectarea unei reguli. A doua variantă este de natură semantică, se referă la corespondența cu realitatea. A treia nu are o localizare clară, dar ezită între sintaxă și semantică. A patra este de natură pragmatică, se referă la relația noastră cu faptele, rezultă dintr-un contract social. A cincea este semantică iar a șasea mai degrabă pragmatică.

Distincția sintaxă-semantică-pragmatică este fundamentală în semiotică, ea ne poate ghida și în materie de greșeală. Tipic sintactice sunt greșelile în calcule. Arhimede a greșit la calculul celei de a patra zecimale a lui pi, greșeala fiind corectată mult mai târziu, iar W. Shanke a evaluat, la 1853, 607 zecimale ale lui pi, dar abia în 1945 D. Ferguson a observat că, începând cu poziția 527, toate aceste evaluări erau greșite, în cele ce urmează în capitolul de față, cititorul va afla și despre multe alte greșeli sintactice celebre. Exemple de greșeli semantice care au marcat istoria științei sunt cele referitoare la definirea lungimii unei

curbe (în secţiunea „Este curba un concept geometric?“) şi la definirea tangentei (în secţiunea *Capcanele tangentei*). Alte greşeli semantice s-au referit la definirea numărului cardinal drept clasă de echipotenţă, deci de mulţimi aflate în corespondenţă bijectivă două câte două (abia în teoria axiomatică a mulţimilor această greşeală este corectată, prin definirea cardinalelor cu ajutorul ordinalelor) şi, mai recent, la modul în care N. Chomsky a stabilit în 1956 că limba engleză nu este un limbaj independent de context.

O greşeală semantică celebră este aceea de a extinde la calculul ariei unei suprafeţe modul în care C. Jordan evaluase lungimea unei curbe. Faimosul paradox al lui Schwartz, care punea în evidenţă faptul că, pe această cale, aria laterală a unei cutii de conserve ar putea fi... infinită, a pus capăt acestei anomalii. Definiţia de tip Jordan a fost înlocuită cu o alta, pe linia gândirii lui H. Lebesgue şi M. Fréchet. Cititorul poate găsi detaliile în cartea noastră *Noţiuni de analiză matematică* (Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967).

Cât despre greşelile pragmatice, ele sunt probabil cele mai numeroase şi mai importante, dar şi cele mai controversate. Este o greşeală pragmatică să califici ca evident un rezultat care cere o îndelungă reflecţie (greşeală atribuită marelui matematician englez G. H. Hardy) şi, în general, aici intră greşelile de natură pedagogică. Folosirea, în aproximarea unei funcţii, a unui şir care converge prea încet către acea funcţie este o greşeală pragmatică dacă există un alt şir care converge mai repede către funcţia respectivă. Folosirea unui algoritm care lucrează în timp exponenţial, într-o problemă pentru care dispunem de un algoritm polinomial, este şi ea o greşeală pragmatică. Cititorul va putea găsi exemple de cele trei tipuri de greşeli în viaţa de fiecare zi. Dar nu trebuie să pierdem din vedere că graniţele dintre cele trei niveluri nu sunt totdeauna precise. Faptul regretabil este că şcoala se ocupă aproape exclusiv de greşelile sintactice, toate asimilate cu păcate care trebuie sancţionate.

Greşeală şi eroare

Multe limbi fac diferenţa de tipul pe care limba română îl operează între *greşeală* şi *eroare*. În franceză avem *faute* şi *erreur*, în engleză *mistake* şi *error*. *Greşeală* este de origine slavă, *eroare* are o etimologie latină. O sugestie despre diferenţa dintre ele este dată de faptul că putem vorbi despre o eroare de aproximaţie, dar nu şi despre o greşeală de aproximaţie, atunci când ne referim la diferenţa dintre numărul pi şi valoarea 3,14. Spunem în acest caz că am comis o eroare de aproximaţie de ordinul miimilor, dar nu putem spune că am comis o greşeală de aproximaţie. Cu alte cuvinte, cel puţin în contexte de acest fel, eroarea se referă la o situaţie inevitabilă (numărul pi nu poate fi decât aproximat, nu şi determinat cu exactitate), o situaţie datorată nu unei insuficienţe de natură umană, ci unei stări obiective. Dar nu putem generaliza această observaţie, problema rămâne deschisă. Este interesant însă să observăm aspectul ludic al acestei probleme. Verbul latin *errare*, ca şi verbul francez *errer*, se referă la umblatul la întâmplare, fără un scop precis, situaţie tipică stării de libertate, care îţi permite să te rătăceşti, să vagabondezi după bunul plac. Verbul *a greşi* se contaminează şi el de acest statut şi se află implicat în mai toate actele de creaţie. Un exemplu elocvent de modul în care o greşeală poate deveni o sursă de creativitate este greşeala lui Lebesgue, pe care o prezentăm într-o secţiune din acest capitol şi care se află la originea unui întreg capitol al topologiei, teoria mulţimilor analitice şi proiective. Alte exemple abundă în secţiunile care urmează. Dar nu este vorba numai de matematică. Să ne amintim de *La grammaire des fautes* a lui H. Frei. Multe dintre regulile gramaticale de azi sunt greşelile de ieri.

Cum măsurăm gravitatea unei erori?

Viaţa socială este guvernată de reguli de funcţionare, de imperative morale şi de norme juridice, încălcarea lor este de obicei sancţionată, dar natura şi gravitatea sancţiunii sunt dintre cele mai variate, în raport

cu natura şi gravitatea încălcării. În ştiinţă, mai cu seamă în ştiinţele aşa-zise exacte, distincţia dintre corectitudine şi greşeală este de cele mai multe ori riguroasă. Nu acelaşi lucru se poate spune despre posibilitatea de a compara şi ierarhiza greşelile matematice după gravitatea lor. Aici rămâne încă loc pentru multă subiectivitate. Aceasta este şi motivul pentru care la concursurile de matematică se procedează ca şi la concursurile de alte specialităţi, elaborându-se în prealabil un barem pe baza căruia se asigură o relativă concordanţă între crteriile de apreciere folosite dediferitele cadre didactice angajate în lectura şi notarea lucrărilor scrise. Elaborarea baremului comportă mai totdeauna discuţii aprinse între cei implicaţi, iar pe parcursul lecturii lucrărilor baremul este uneori reconsiderat, pentru a-l adapta mai bine la realitatea lucrărilor candidaţilor. În materie de greşeală, imaginaţia candidaţilor este prodigioasă, oferind deseori situaţii neprevăzute de baremul stabilit iniţial. Mulţi candidaţi au o imagine falsă despre corectitudinea tratării unei probleme, find convinşi că esenţială este obţinerea rezultatului. Este corectitudinea rezultatului o garanţie a corectitudinii tratării problemei? Răspunsul este categoric negativ. Ceea ce interesează în primul rând este gândirea care se află la baza tratării. Redactarea trebuie să fie suficient de coerentă şi de explicită pentru a-l convinge pe cititor că autorul redactării a gândit problema în mod autentic şi cu o înţelegere globală a ei, în sensul că fiecare parte a tratării este raportată la firul conducător al soluţiei. Din păcate, multe redactări sunt discontinue, lipsite de motivaţii şi justificări, iar rezultatul aşezat la sfârşit, chiar dacă este corect, rămâne neconvingător. O lucrare de matematică, întocmai ca orice altă lucrare, este apreciată nu numai în partea ei finală, ci şi după modul de ansamblu în care ea se prezintă.

Operaţii incorecte cu rezultate corecte

Ce-aţi spune dacă în fracţia 16/64 un elev ar dori să „simplifice“ pe 6 de la numărător cu 6 de la numitor? O enormitate de nota 2, nu? şi totuşi, rezultatul acestei ridicole operaţii de simplificare este corect, deoarece împărţind pe 16 la 64 obţinem într-adevăr 1/4. Este prin

aceasta atenuată gravitatea greşelii comise? Nicidecum! Nu totdeauna o gândire greşită se soldează cu un rezultat greşit, cel puţin imediat. Desigur, dacă cel în cauză va repeta greşeala, aplicând de exemplu acelaşi tratament fracţiei 12/24 şi „simplificând" pe 2 de la numărător cu 2 de la numitor, atunci el va obţine rezultatul greşit 1/4. Nu trebuie să ne mire acest lucru: Un comportament greşit nu are totdeauna acelaşi rezultat. Un rezultat greşit este simptomatic pentru un tratament greşit, ne avertizează că nu am raţionat corect, aşa cum durerea este simptomatică pentru starea de boală. Bolile fără dureri sunt periculoase tocmai prin absenţa semnalului care trebuie să ne atragă atenţia asupra necesităţii de a ne supune examenului medical şi tratamentului corespunzător (care poate include şi o schimbare de comportament). La fel de periculoasă este şi gândirea vicioasă care nu afectează rezultatul; ea ne poate păcăli cu iluzia corectitudinii.

Dar să revenim asupra simplificării lui 6 în fracţia 16/64 pentru a-l obţine pe 1/4. Observăm că o simplificare ilicită similară, aplicată fracţiei 26/65, conduce la rezultatul corect 2/5. O simplificare la fel de ilicită, de astă dată a lui 9, conduce la egalităţile corecte 19/95 = 1 / 5 şi 49/98 = 4/8. Această repetare a unui fenomen care părea să fie produsul unei întâmplări foarte puţin probabile ne dă de bănuit că aici s-ar ascunde un fapt matematic interesant. Să pornim în căutarea lui.

Greşeli care sugerează teoreme

Să nu uităm că în scrierea obişnuită a numerelor se utilizează reprezentarea zecimală, 16 înseamnă 10 . 1 + 6, iar 64 înseamnă (10 . 6 + 4). Avem deci (10 . 1 + 6) / (10 . 6 +4) = 1/4. Tot aşa (10 . 2 + 6) / (10 . 6 + 5) = 2/5, (10 . 1+9)/(10 . 9+5)=1/5 şi (10 . 4+9) / (10 . 9+8)=4/8. Să încercăm să generalizăm aceste exemple. Se obţine următoarea problemă: Pentru care valori întregi pozitive ale lui a, b şi c are loc egalitatea $(10\ a+b)/(10\ b+c)=a/c$ sau, ceea ce este echivalent, $9ac$ = b(10a – c). O soluţie trivială este a = b = c. Exemplele de mai sus nu intră însă aici, ci se referă la cazul în care a este diferit de c, iar

b este egal cu 6 sau cu 9. Obţinem ecuaţia $(10 \cdot a + 6)/(10 \cdot 6 + c) = a/c$, având cele două soluţii semnalate mai sus şi ecuaţia $(10 \cdot a + 9)/(10 \cdot 9 + c) = a/c$, având celelalte două soluţii semnalate mai sus (C. Stanley Ogilvy, John T. Anderson, *Excursions in Number Theory*, Oxford Univ. Press, New York, 1966, p. 86).

Robert A. Carman (*Mathematical Mistakes*, The Mathematics Teacher, vol 64, no. 2, 1971, p. 109-115) propune şi alte exemple, mai complicate, de simplificări frauduloase care conduc la rezultate corecte. Astfel, în următoarele fracţii, „simplificarea" cifrei mediane a zecilor, aceeaşi la numărător şi la numitor, conduce la un rezultat corect 165/660 = 15/60, 385/880 = 35/80, 495/990 = 45/90, 332/830 = 32/80, 275/770 = 25/70. Ar fi interesant de construit problema generală care se ascunde aici şi de urmărit modul în care ea ar putea fi soluţionată; în această privinţă se poate folosi modelul tratat la începutul acestui paragraf. Alte exemple: „simplificarea" lui 7, pentru a se obţine egalitatea 127/762 = 12/62; simplificarea lui 5 pentru a ajunge la egalitatea 3 544/7 531 = 344/731.

Dacă cifra zecilor este nulă atât la numărător cât şi la numitor, ea se supune următorului comportament: a0 $b/c0\ d = ab/cd$ dacă $2a = c$, $c \leq 8$ şi $2b = d$, $d \leq 8$. De exemplu, 103/206 = 13/26, 403/806 = 43/86. A.P. Darmoryad (*Mathematical Games and Pastimes*, Macmillan, New York, 1964, p. 35) observă că simplificarea frauduloasă cu 18 în fracţia 143185/1701856 conduce la rezultatul corect 1435/17056. Însă R.A. Carman (loc. cit.) opinează că, de îndată ce trecem la numere de ordinul miilor sau mai mari, fenomene ca cele de mai sus sunt tot mai rare. Are oare dreptate? Până la clarificarea situaţiei, să contemplăm următorul exemplu în care trei „simplificări" succesive ale lui 6 (prima pe poziţia sutelor, a doua pe poziţia zecilor, iar a treia la unităţi şi zeci) conduce la tot atâtea rezultate corecte: 2666/6665 = 266/665 = 26/65 = 2/5. Ar fi interesant de discutat problema generală care se ascunde aici.

Greşeli celebre

De la greşeli ca cele de mai sus, care, în ciuda enormităţii lor, nu afectează rezultatul, putem trece la altele care, dimpotrivă, invalidează rezultatul, uneori fără speranţă de recuperare. Exemplele de acest fel abundă. Pentru toate problemele celebre ale Antichităţii (cuadratura cercului, duplicarea cubului, trisecţiunea unghiului cu ajutorul riglei şi compasului, demonstrarea postulatului paralelelor etc.) s-au propus de-a lungul timpului nenumărate „soluţii", în care greşeala era uneori aparentă, alteori foarte ascunsă. Abia în secolul al XIX-lea s-a stabilit statutul lor, bine cunoscut astăzi. Leonhard Euler a propus în 1749 o demonstraţie pentru teorema fundamentală a algebrei. Gauss a criticat această demonstraţie, invalidând-o, dar în acelaşi timp a folosit o idee ingenioasă a ei, care a constituit baza celei de a doua demonstraţii date de Gauss teoremei fundamentale a algebrei. Thomas Stieltjes, autorul integralei care-i poartă numele, a crezut că a demonstrat celebra ipoteză a lui Riemann, conform căreia, cu unele excepţii cunoscute, zerourile funcţiei care se obţine ca, sumă S(z) a seriei de termen general $1/n^z$ (unde $z = x + iy$ este o variabilă complexă) sunt toate aşezate pe dreapta de ecuaţie $x = 1/2$. Importanţa acestei ipoteze este imensă, în primul rând pentru impactul ei asupra teoriei numerelor prime. Încă Euler arătase că dacă $y = 0$ şi $x > 1$, atunci S(z) este egal cu produsul infinit, după toate numerele prime P, din puterea de exponent -1 a binomului $1 - 1/p^z$. Deşi ipoteza lui Riemann nu a fost demonstrată nici până azi, impactul ideilor lui Stieltjes în această ordine de idei nu poate fi negat. Astfel, Jacques Hadamard se referă la Stieltjes în cercetările sale privind funcţia S(z).

O altă greşeală celebră este aceea comisă de Paul Appell în 1926, când publică în „Comptes Rendus de l"Académie des Sciences", Paris, rezultatul care afirmă iraţionalitatea constantei lui Euler (egală cu limita, când n creşte, din $1 + 1/2 + ... + 1/n - \log n$); la câteva săptămâni după publicare, Appell a trebuit să publice o retractare a rezultatului,

în ciuda faptului unanim recunoscut că demonstraţia sa conţine o idee interesantă, care a reţinut atenţia matematicienilor. De la Appell încoace, alţi matematicieni s-au înşelat, la rândul lor, crezând că au stabilit iraţionalitatea constantei lui Euler; însă natura acestei constante rămâne în continuare necunoscută.

Lista greşelilor de acest fel este imensă. Poate că n-ar fi exagerat să se spună că istoria matematicii poate fi privită ca o istorie a greşelilor. Într-adevăr, tatonările, bănuielile nu pot evita greşelile, iar ideile valoroase trebuie să plătească tributul unei insuficiente rigori. Drumul spre cristalizarea conceptului de convergenţă uniformă trece prin greşeala lui A. Cauchy, care a crezut că orice şir convergent de funcţii continue pe *(a, b)* are ca limită o funcţie continuă pe *(a, b)*.

O teorie născută din observarea unei greşeli

Este vorba de teoria mulţimilor analitice, care a luat naştere în 1917, în condiţii puţin obişnuite. Iniţiatorul acestei teorii este un student, Mihail Suslin, din Moscova, care a primit de la profesorul său, N. Luzin, indicaţia de a studia celebrul memoriu al lui Henri Lebesgue (creatorul integralei care-i poartă azi numele), *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1905). În acest memoriu, Suslin a identificat o greşeală. Pentru a o explica, trebuie mai întâi să introducem unele definiţii.

Fie X o mulţime. O familie S nevidă de părţi ale lui X formează un corp dacă operaţiile de reuniune cel mult numărabilă şi de diferenţă, aplicate mulţimilor din S, conduc tot la mulţimi din S. Intersecţia unei familii de corpuri este tot un corp. Fie acum o familie A de părţi ale lui X. Există cel puţin un corp care conţine pe A acesta este format din toate părţile lui X. Intersecţia tuturor corpurilor care conţin pe A este, prin definiţie, corpul generat de A, notat cu $S(A)$.

Să presupunem acum că X este spaţiul euclidian cu n dimensiuni. Fie A *f*amilia tuturor intervalelor deschise n-dimensionale; A nu formează un corp, dar generează corpul $S(A)$, numit corpul mulţimilor

boreliene din spaţiul euclidian *n*-dimensional. Mulţimile din S(A) se numesc boreliene. O funcţie reală *f* se numeşte boreliană dacă mulţimile de forma *(x; f(x) > a)* sunt boreliene pentru orice *a* real. Să reproducem acum, din memoriul lui Lebesgue, pasajul incriminat de Suslin, unde se caută a se demonstra că dacă $x = f(t)$ este o funcţie boreliană şi inversabilă, atunci funcţia inversă $t = g(x)$ este de asemenea boreliană. „Datorită ipotezei, se poate arăta că mulţimea punctelor din planul coordonatelor *t*, *x* în care $x - f(t) = 0$ este o mulţime boreliană, E. Deci, oricare ar fi $a > b$, partea *B* a lui *E* pentru care $a \leq t \leq b$ este o mulţime boreliană. Însă proiecţia, pe axa absciselor, a unui interval bidimensional este un interval unidimensional, proiecţia unei reuniuni de mulţimi este reuniunea proiecţiilor acestor mulţimi, iar proiecţia intersecţiei unui şir descrescător de mulţimi este egală cu intersecţia proiecţiilor mulţimilor din şir. Ţinând seamă că mulţimile boreliene coincid cu mulţimile care se obţin pornind de la intervale, prin aplicarea repetată a operaţiilor de reuniune numărabilă şi intersecţie de şiruri descrescătoare, rezultă că proiecţa mulţimii B pe axa $t = 0$ este o mulţime boreliană. Prin aceasta s-a demonstrat că funcţia $t = g(x)$ este boreliană".

Radiografia greşelii lui Lebesgue

Greşeala identificată de Suslin în pasajul de mai sus este următoarea: Afirmaţia că proiecţia intersecţiei unui şir descrescător de mulţimi este egală cu intersecţia proiecţiilor acestor mulţimi este falsă. Într-adevăr, fie E_n mulţimea tuturor punctelor din plan ale căror coordonate x, y satisfac $x = 0,\ 0 < y < 1/n$.. Este vizibil că nu există nici un punct comun tuturor mulţimilor $E_n (n = 1, 2, ...)$, deci proiecţia pe axa absciselor a intresecţiei mulţimilor E_n (pentru $1 \leq n < \infty$) este mulţimea vidă. Pe de altă parte, oricare ar fi *n* întreg pozitiv, proiecţia pe axa absciselor a mulţimii E_n este nevidă, fiind formată dintr-un punct: originea. Deci intersecţia proiecţiilor mulţimilor $E_n (n = 1, 2, ...)$ pe axa absciselor este nevidă.

Pentru Lebesgue, această greşeală era explicabilă din punct de vedere psihologic, ea fiind legată de o chestiune marginală faţă de scopul principal al memoriului său. Greşeala este cu totul locală, neatingând cu nimic valoarea de ansamblu a lucrării. Intuiţia lui Lebesgue a fost, de altfel, justă; teorema lui Lebesgue, chiar dacă lacunară în demonstraţie, s-a dovedit a fi adevărată, însă demonstraţia corectă a acestei teoreme, dată ulterior de N. Luzin, se sprijină pe teoria mulţimilor analitice, teorie născută tocmai din radiografia greşelii lui Lebesgue. Să explicăm despre ce este vorba. Suslin, analizând scăparea lui Lebesgue, a descoperit că o operaţie atât de simplă cum este proiecţia, aplicată unei mulţimi boreliene, poate să conducă la o mulţime neborelianã. De exemplu, proiecţia unei intersecţii numărabile de mulţimi deschise (o mulţime din plan este deschisă dacă împreună cu orice punct al mulţimii este inclus în mulţime un întreg disc centrat în punctul respectiv) este uneori o mulţime liniară neborelianã. Mulţimile analitice liniare sunt, prin definiţie, acele mulţimi liniare care se obţin ca proiecţii ale mulţimilor boreliene din plan. Evident, orice mulţime borelianã este analitică; reciproca însă nu este adevărată.

Din păcate, Suslin a murit foarte tânăr (în 1918). Profesorul său, Luzin, este cel care a construit întreaga teorie a mulţimilor analitice, iniţiată de Suslin. Luzin, în modestia sa, merge până acolo încât atribuie lui Lebesgue meritul de a fi descoperit mulţimile analitice, deoarece construcţia acestor mulţimi este implicit conţinută în memoriul lui Lebesgue, Dar Lebesgue „se apără" de această descoperire, despre care mărturiseşte că nu a avut nici cea mai vagă idee, subliniind în acelaşi timp valoarea şi frumuseţea incontestabilă a acestei teorii; pentru detalii, se poate consulta capitolul al V-lea al lucrării noastre *Noţiuni de analiză matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967.

O lucrare românească despre eroarea matematică

Avem în vedere cartea lui Alexandru Froda (*Eroare şi paradox în matematică*, Editura Enciclopedică, Bucureşti, 1971), care aduce în

faţa cititorilor o experienţă foarte bogată şi interesantă, cu observaţii de o desoebită fineţe. Al. Froda a reuşit, încă în 1927, să identifice o eroare într-o carte a celebrului matematician francez Emile Borel (*Leçons sur les fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1909), eroare recunoscută ulterior de acesta din urmă (a se vedea, la p. 39-43 din cartea lui Froda, analiza erorii lui Borel). Tot Al. Freda a descoperit o eroare în tratatul clasic al lui Charles de Comberousse (*Algèbre supérieure*, vol. 3, livre 1, chap. II, Gauthier-Villars, Paris, 1904, p. 16). Caracterul relativ elementar al chestiunii ne permite reproducerea aici. Enunţul incriminat din cartea lui Comberousse este următorul: Un polinom P(x) este identic nul dacă şi numai dacă toţi coeficienţii săi sunt nuli. Iată demonstraţia lui Comberousse: Fie $P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_mx^m$ – un polinom de de gradul m care se anulează pentru mai mult de m valori ale lui x şi care este, prin urmare, identic nul. Acest polinom, fiind nul pentru orice x, este nul pentru $x = 0$, deci $A_0 = 0$. Polinomul se poate deci scrie (1) $P(x) = x(A_1 + A_2x + A_3x^2 + .. + A_mx^{m-1})$. Deoarece P(x) este nul oricare ar fi x, paranteza din membrul al doilea al egalităţii (1) satisface *aceleaşi condiţii*. Avem deci, presupunând că $x = 0$, rezultatul $A_1 = 0$; în acelaşi fel se arată că $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, ..., $A_m=0$.

Aici s-a încheiat demonstraţia lui Comberousse. Al. Froda atrage atenţia că greşeala de raţionament se introduce prin cuvintele subliniate în text. Într-adevăr, afirmaţia respectivă este falsă, ea verificându-se numai sub condiţia $x \neq 0$. Rezultă că polinomul $P_1(x) = A_1 + A_2x + A_3x^2 + ... + A_mx^{m-1}$, polinom care apare în paranteza din membrul al doilea al egalităţii (1), ia valoarea zero oricare ar fi x diferit de zero, deci nu reproduce condiţiile iniţiale cărora le-a fost supus polinomul $P(x)$. În continuare, Al. Froda dă o demonstraţie corectă (bazată pe noţiunea de funcţie continuă) a enunţului la care se referă Comberousse, enunţ bine cunoscut azi oricărui elev din clasele superioare.

Un alt exemplu semnalat de Froda se referă la teorema lui G. Cantor şi F. Bernstein: Fie *A* şi B două mulţimi infinite pentru care există o parte A_1 a lui A şi o parte B_1 a lui B astfel încât A este în corespondenţă bijectivă cu B_1, iar B se află în corespondenţă bijectivă cu A_1; în aceste condiţii, există o bijecţie între A şi B. Matematicianul american Ky Fan a pretins că are loc următoarea generalizare a teoremei lui Cantor şi Bernstein. Fie A_1, A_2, ,,, A_n un număr finit (n>2) de mulţimi infinite ordonate ciclic, astfel încât $A_{n+1} = A_1$. Să admitem că, pentru fiecare $i = 1, 2, ..., n$, există o bijecţie t_i între A_i şi o parte a lui A_{i+1}. În aceste condiţii, fiecare A_i, se partiţionează în două mulţimi B_i şi C_i, astfel încât t_i transformă bijectiv pe B_i în C_{i+1} ($t_i(B_i)=C_{i+1}$), în timp ce $C_{n+1} = C_1$.

Însă Al. Froda a sesizat că raţionamentul lui Ky Fan nu este corect pentru valorile impare ale lui n, rămânând corect pentru orice valoare pară a lui *n* (p. 47-49 ale cărţii sale). O tratare a problemei valabilă independent de paritatea lui *n* apare abia la B.L. Sanders (în *Mathematische Zeitschrift,* vol. 76, 1961, p. 51-55).

Frecvenţa greşelilor şi lupta împotriva lor

Cât de des greşesc matematicienii? Unii sunt de părere că greşeala apare la tot pasul. Unul dintre cei mai importanţi specialişti în teoria probabilităţilor, J.L. Doob, a pretins că, dacă deschizi la întâmplare o lucrare de matematică, este foarte probabil să existe acolo cel puţin o greşeală. Desigur, intră aici greşeli de toate calibrele, cele mai numeroase fiind probabil inadvertenţele locale, lipsite de gravitate şi fără consecinţe serioase asupra ansamblului lucrării. Totuşi, pe măsură ce matematica s-a complicat şi lungimea medie a demonstraţiilor a crescut, probabilitatea greşelii a crescut şi ea, devenind tot mai important controlul demonstraţiilor matematice.

Greşesc matematicienii mai mult decât alţi specialişti? Este matematica marcată de spectrul erorii, mai mult decât fizica, chimia, biologia

sau geologia? Probabil că nu. Am fi chiar tentaţi să credem că, datorită scrupulului lor deosebit pentru rigoare, matematicienii greşesc mai puţin decât colegii lor din alte domenii de cercetare. Însă în matematică, mai mult decât în alte domenii, graniţa dintre corectitudine şi greşeală este, de cele mai multe ori, precisă, indiscutabilă. Aceasta nu înseamnă că greşelile sunt foarte vizibile. Modul în care se poate ascunde greşeala în matematică a fost ilustrat anterior prin exemple dintre cele mai variate. Aşa cum observam mai sus, complexitatea crescândă a demonstraţiilor matematice măreşte probabilitatea greşelii. Apar azi demonstraţii uriaşe ca lungime şi complexitate. După evaluări aproximative, teorema (recentă) de clasificare a grupurilor finite simple a cerut zeci de ani de eforturi ale unei întregi armate de matematicieni, 4500 de pagini de teorie matematică şi, în plus, câteva mii de ore de calculator. Teorema celor patru culori, demonstrată în 1976, a cerut şi ea un efort teoretic şi computaţional considerabil (chiar dacă net inferior celui reclamat de teorema de clasificare a grupurilor simple finite). Demonstrarea unui rezultat apropiat de conjectura lui Goldbach ocupă o carte întreagă şi se prevalează de mai tot ce este important în teoria numerelor. Amintim că ipoteza lui Goldbach afirmă că orice număr par superior lui 2 este suma a două numere prime. Rezultatul demonstrat afirmă că orice număr par superior lui 2 este suma dintre un număr prim şi produsul a cel mult două numere prime. Conjectura lui Bieberbach, demonstrată în urmă cu vreo 17 ani, afirmă că dacă funcţia de variabilă complexă $f(x)$ este suma, în cercul cu centrul în origine şi de rază egală cu unitatea, a unei serii convergente de forma unui „polinom infinit“ fără termen liber şi având drept coeficient al lui z pe 1, iar f este o aplicaţie injectivă în cercul unitate, atunci coeficientul puterii de exponent n a lui z nu poate întrece valoarea n (oricare ar fi numărul natural n).

Devine matematica o ştiinţă experimentală?

Demonstraţia iniţială a conjecturii lui Bieberbach conţinea multe greşeli, dar nici una nu s-a dovedit a fi esenţială. De altfel, în procesul de testare a demonstraţiei s-au obţinut simplificări considerabile şi au

fost eliminate multe erori. Este însă semnificativ faptul că aceasta s-a realizat nu prin efortul exclusiv al autorului demonstraţiei, ci prin eforturile conjugate ale mai multor matematicieni, din diverse ţări (U.S.A., U.R.S.S., şi R.F.G). S-a dovedit astfel încă o dată importanţa cooperării internaţionale în dezvoltarea ştiinţei.

O situaţie mai complicată s-a ivit în legătură cu demonstraţia teoremei celor patru culori (enunţul aproximativ al acestei teoreme este: Patru culori sunt necesare şi suficiente pentru a colora orice hartă, reală sau imaginară, în aşa fel încât două „ţări" vecine să nu primească niciodată aceeaşi culoare). Era pentru prima oară când, în demonstraţia unei teoreme, se folosea calculatorul electronic. Unul dintre autorii demonstraţiei, Wolfgang Haken, fiind întrebat dacă apreciază că demonstraţia teoremei celor patru culori este o demonstraţie ca toate celelalte, a dat următorul răspuns: dacă privim o demonstraţie ca un lanţ finit de deducţii logice formale, atunci demonstraţia teoremei celor patru culori nu prezintă nimic deosebit. Dacă însă cerem în plus ca o demonstraţie să poată fi supravegheată, controlată şi verificată în toate detaliile de către un matematician individual, fără nici un fel de ajutor fizic (de exemplu, prin folosirea unui calculator) şi aceasta într-un timp rezonabil, în orice caz finit, atunci demonstraţia în discuţie nu mai este de tipul celor obişnuite.

Consideraţiile de mai sus atrag atenţia asupra unei situaţii noi apărute în matematică şi care, probabil, va lua o amploare tot mai mare în deceniile următoare. Începând cu dezvoltarea geometriilor neeuclidiene, devenise tot mai clar că sistemele de axiome cu care se lucrează în matematică nu sunt numai rezultatul unui exerciţiu logic şi combinator, ci manifestă şi o relativă dependenţă de proprietăţile fizice ale entităţilor pe care le avem în vedere. În particular, geometria depinde, în bună măsură, de fizică; axiomele ei au şi o latură experimentală. Acum, prin teorema celor patru culori şi prin teorema de clasificare a grupurilor simple finite, însuşi procesul demonstrativ, pe care-l credeam de neatins în puritatea sa logică, intră într-o dependenţă tot mai accentuată de fizică, de experiment. Acest caracter experimental al

matematicii se manifestă în forme tot mai variate. Modelarea matematică a sistemelor este acum tot mai frecvent secondată de diferite tehnici de simulare a comportamentului sistemic, activitate de natură pronunţat experimentală. Unele ipoteze şi conjecturi sunt testate, pentru cazuri particulare, cu ajutorul calculatorului electronic, în vederea obţinerii unor informaţii de plauzibilitate a diferitelor răspunsuri posibile. A apărut chiar o carte cu titlul *Experiments in Mathematics* (de Ulf Grenander) dedicată acestei chestiuni. Numeroase conjecturi din domeniul teoriei numerelor sunt supuse actualmente unor testări de acest fel. Dar folosirea calculatorului în chiar procesul demonstrativ al unei teoreme constituie o etapă superioară, în orientarea spre fizic şi experiment a activităţii matematice. Numai că, în acest fel, controlul corectitudinii demonstraţiei devine mai dificil, uneori poate chiar imposibil. O teoremă generală din informatica teoretică afirmă că un program de calculator nu poate fi totdeauna controlat cu ajutorul unui program de calculator; mai general, gândirea algoritmică nu poate fi totdeauna controlată tot pe cale algoritmică.

Pariul lui J.L. Doob

Schema generală a strategiei folosite în demonstrarea teoremei celor patru culori şi a altora de acest fel este următoarea: (a) Se arată că teorema este adevărată de îndată ce o anumită proprietate P este verificată într-un număr finit de cazuri speciale; (b) Se inventariază în mod explicit cazurile speciale care trebuie testate; (c) Se trece la testarea proprietăţii P în fiecare caz special în parte. Se observă că nu este vorba de demonstraţii bazate *exclusiv* pe calculator, ci de o strategie mixtă, în care primele două etape (a) şi (b) angajează puterile minţii umane, iar etapa a treia, (c), recurge la folosirea colaborării dintre om şi calculator. Etapa (a) constă în a reduce problema de la un număr infinit la un număr finit de parametri;în cazul teoremei celor patru culori, această etapă a parcurs mari dificultăţi, necesitând un efort de peste un secol al unor matematicieni aparţinând câtorva generaţii.

Demonstraţia din 1976 valorifică, într-adevăr, numeroase idei şi rezultate ale unor predecesori care, dacă au eşuat în demonstrarea completă a teoremei celor patru culori, au pus totuşi cărămizi preţioase la edificiul acestei demonstraţii. În ceea ce priveşte cazurile speciale care trebuiau testate, ele erau, pentru teorema în discuţie, în număr de vreo 1500. Este lesne de înţeles că migala şi complexitatea unor atare operaţii depăşeau posibilităţile unei abordări manuale.

Demonstraţia din 1976 a teoremei celor patru culori ocupa 136 de pagini tipărite. Unele simplificări datorate fie autorilor iniţiali, fie unor contribuţii ale altor matematicieni, au reuşit să reducă numărul orelor de calculator necesare în etapa (c). Era clar de la început că programele de calculator depindeau esenţial de calitatea limbajului de programare folosit. Desigur, se poate admite, în principiu, că simplificări ulterioare ale demonstraţiei ar putea face inutilă folosirea calculatorului. Deocamdată însă nu am ajuns în acest stadiu, iar acest fapt face dificilă verificarea demonstraţiei. În 1982, o lucrare de diplomă a fost consacrată exclusiv acestei verificări (U. Schmidt, *Überprufung des Beweises für den vierfarben Satz*. Diplomarbeit, Technische Hochschulle, Aachen), prilej cu care au fost identificate unele erori în demonstraţie; s-a răspândit atunci zvonul că demonstraţia teoremei celor patru culori nu este bună, că nu poate fi acceptată. J.L. Doob îi provocase pe Appel, Haken şi Koch, autorii demonstraţiei din 1976, pretinzând că după cel mult cinci luni de investigaţii va găsi neîndoielnic o greşeală în demonstraţie. Appel, Haken şi Koch au răspuns că acceptă pariul, cu condiţia de a li se rezerva o perioadă de două săptămâni începând cu data semnalării greşelii, perioadă în care ei, în mod cert, vor putea înlătura greşeala şi repara demonstraţia. J.L. Doob a aceptat, dar pariul a fost câştigat de Appel, Haken şi Koch. Ulterior, Haken a publicat un articol cu titlul semnificativ: „Demonstraţia teoremei celor patru culori este bună", în care explică detaliat şi convingător ideea de ansamblu a demonstraţiei şi motivul pentru care eventuale noi greşeli sau lacune care ar mai putea fi descoperite nu pot contamina ansamblul procedării.

Terapia greşelii

Discuţia de mai sus ne atrage atenţia asupra statutului foarte eterogen, variabil şi nuanţat al greşelii în matematică şi, în general, în cunoaşterea umană. Există o infinitate de grade de gravitate ale greşelii. Din punct de vedere psihologic, greşelile sunt inevitabile. Multe dintre ele îndeplinesc o adevărată funcţie terapeutică. Unele greşeli se află la baza unor mari descoperiri (a se vedea greşeala lui Lebesgue din care s-a născut teoria mulţimilor analitice a lui Suslin şi Luzin), altele au generat mari eşecuri (a se vedea şirul de matematicieni care au crezut a fi rezolvat unele probleme celebre, de la natura constantei lui Euler până la ipoteza lui Ricmann). În practica matematică obişnuită, greşeala se poate ivi în împrejurări dintre cele mai diverse: folosirea unei teoreme fără îndeplinirea tuturor condiţiilor care permit aplicarea ei; omiterea unui caz dintre mai multe cazuri posibile într-o anumită situaţie; încălcarea unei reguli logice de inferenţă; efectuarea necorectă a unor calcule; folosirea într-o formă necorectă a unui rezultat anterior etc. Există mijloace de a evita greşeala? De a o evita cu desăvârşire este cam greu, dar putem reduce frecvenţa ei prin luarea unor măsuri de precauţie. După ce redactăm un text, trebuie să-l revedem cu atenţie. P.R. Halmos preconiza ca după redactarea paginii a n-a să revedem primele n pagini. În acest fel, într-un text de zece pagini, prima este revăzută de 10 ori, a doua de 9 ori, a treia de 8 ori, şi aşa mai departe, a opta de 3 ori, a noua de 2 ori, iar pagina a zecea este revăzută o singură dată. Ideea care ni se sugerează aici este aceea că, pe măsură ce înaintăm cu redactarea, paginile deja redactate ne pot apărea într-o lumină nouă. Se creează însă o asimetrie, o neconcordanţă între controlul repetat al primelor pagini şi controlul superficial al celor din urmă. Această necunoscută poate fi atenuată prin lectura repetată a textului în forma sa integrală. Dar nu este suficientă recitirea repetată a textului; mai este nevoie şi de un control riguros al surselor folosite. Folosirea unei teoreme pe baza modului în care ne-o amintim este riscantă; prudenţa reclamă verificarea la sursă a folosirii corecte a teo-

rețelei respective (desigur, aceasta nu este posibil la un examen sau concurs la care consultarea diferitelor surse nu este permisă). Calculele trebuie și ele verificate etapă cu etapă; dacă amânăm verificarea până la încheierea tuturor calculelor, s-ar putea să intrăm în criză de timp, în eventualitatea necesității refacerii lor (desigur, această chestiune privește cu deosebire situația în care, așa cum se întâmplă la un examen, avem la dispoziție o durată precisă, destul de limitată, pentru rezolvarea unor probleme). Există apoi o anumită terapeutică a redactării unui text matematic. Graba este o sursă potențială de greșeli. Apoi, matematica pretinde un antrenament îndelungat, în ceea ce privește capacitatea de concentrare a atenției, pe o durată mai mare, asupra unei dezvoltări de raționamente și calcule în care fiecare etapă depinde esențial de etapele anterioare. Un insuficient antrenament de acest tip se află la originea multor greșeli comise de începători. Nu trebuie neglijate nici aparente amănunte, cum ar fi caligrafia redactării. Dacă grafia nu distinge bine între *o* și *a*, între cifra 1 și litera l, între *u* și *n* există posibilitatea substituirii pe parcurs a unor simboluri prin altele. Să mai observăm că nu de puține ori, la examene de matematică, enunțul propus candidaților este interpretat greșit, datorită unei lecturi insuficient de atente sau/și datorită unei cunoașteri superficiale a materiei; de aici, o orientare a răspunsului într-o direcție diferită de aceea avută în vedere de cei care au propus enunțul respectiv. Uneori se întâmplă ca, din neglijență, enunțul să prezinte totuși o anumită ambiguitate, datorită unei formulări nefericite; în acest caz, candidatul, dacă nu poate cere lămuriri, va specifica diferitele interpretări ale enunțului și va preciza interpretarea pe care o adoptă (în cazul în care nu este posibil să se ocupe de fiecare dintre aceste interpretări).

Două zone de manifestare a greșelii

Distingem deci două zone distincte de manifestare a greșelii. Prima zonă privește activitatea de cercetare; aici, fiind vorba de explorarea necunoscutului, este firesc să ne aflăm mereu sub amenințarea erorii.

N-au fost cruţaţi de eroare nici cei mai mari matematicieni. Aceasta nu înseamnă, firește, că eroarea n-are importanţă, că nu trebuie luptat împotriva ei; dar experienţa a arătat că nu eroarea este păcatul cel mai mare pe care-l poate comite un om de ştiinţă, ci lipsa de idei sau pur şi simplu de sens. Decât o lucrare corectă, dar anodină, fără idei noi, interesante, mai bine o lucrare cu greşeli, dar care conţine unele sugestii interesante. A doua zonă de manifestare a greşelii este aceea a proceselor de învăţare. Cunoştinţele deja acumulate sunt sistematizate în cursuri, manuale, monografii şi tratate, unde probabilitatea erorii este evident mai mică decât în articole proaspete din revistele de cercetare. Să nu uităm însă că cei care învaţă după cursuri şi manuale sunt, în mare parte, începători mult mai supuşi erorii decât cei avansaţi şi profesionalizaţi. Chiar dacă în cursuri şi manuale greşelile sunt relativ puţine, greşelile şi confuziile care apar în procesul de învăţare a cursurilor şi manualelor sunt numeroase. Am putea chiar spune că dacă un începător nu comite greşeli şi nu manifestă nedumeriri în învăţarea unei discipline dificile, cum ar fi, de exemplu, Analiza matematică, atunci există o probabilitate mare ca apropierea sa de această materie delicată să fie superficială.

Să observăm, totuşi, că, dacă un cercetător profesionist este capabil, de multe ori, să identifice singur greşelile pe care le-a comis şi, eventual, să le corecteze, un începător este mai rar capabil de acest autocontrol; pentru acesta din urmă, dialogul cu o persoană mai bine pregătită capătă o importanţă deosebită şi poate accelera substanţial procesul de înţelegere. Poate că unul dintre cele mai utile exerciţii propuse unui începător este de tipul: Unde este greşeala? Un începător poate beneficia în două feluri de acest tip de exerciţiu: fie controlând corectitudinea unor texte ale colegilor săi şi dezvoltându-şi în acest fel spiritul critic; fie fiind controlat de colegi ai săi, de la care poate primi observaţii critice. Dar, firește, acest lucru nu este suficient; mai este nevoie şi de controlul efectuat de profesor, deoarece unele greşeli mai subtile vor rămâne probabil neobservate. Dar nici cercetătorii formaţi nu-şi pot detecta singuri toate inadvertenţele; revistele ştiinţifice dau la referat

unor specialişti articolele primite pentru publicare (de regulă, tot de la specialişti) şi rar se întâmplă ca textul să nu fie trimis autorului pentru revizuiri. Există probabil o lege psihologică generală, conform căreia nici o persoană nu se poate obiectiva suficient pentru a-şi putea examina critic propriile sale texte; este totdeauna nevoie de acel „cap limpede" care, citind textul cu un ochi proaspăt, vede şi ceea ce autorului i-a scăpat. Exerciţiile de tipul *Unde este greşeala?* prezintă totuşi un inconvenient important. Interlocutorul este avertizat asupra prezenţei unei greşeli, deci atenţia sa e mobilizată în acest sens; însă într-un proces normal de învăţare şi/sau cercetare, vigilenţa faţă de eventuale erori trebuie să funcţioneze tot timpul, deci şi în absenţa unui avertisment. Este de aceea important ca interlocutorul să fie prevenit că printre textele care i se propun pentru inspecţie se pot afla şi unele în care nu există nici o eroare. Experienţa mi-a arătat că, în astfel de situaţii, fenomenul cel mai caracteristic este identificarea unor erori imaginare, a unor false erori; începătorii devin, în condiţiile unui atare experiment, foarte bănuitori, ei nu mai au încredere aproape în nici una dintre cunoştinţele lor anterioare. Este ca şi cum, supuşi unui proces de intimidare, ei sunt gata să retracteze aproape tot ceea ce au învăţat. Faptul este deosebit de semnificativ pentru ceea ce poate însemna o însuşire superficială a materiei.

Greşeli de tipar benigne

Şi acum, pentru a ne descreţi puţin frunţile, să relatăm unele greşeli de tipar care au devenit celebre datorită corectitudinii involuntare prin care ele se finalizează. Cea mai cunoscută este aceea semnalată de H.E. Dudeny (*Amusements in Mathematatics*, Thomas Nelson & Sons, New York, 1917, p. 20): Produsul dintre 2 la puterea 5 şi 9 la puterea 2 este 2592, cu alte cuvinte prezenţa lui 5 şi a lui 2 la exponent a fost confundată cu prezenţa lor „la parter", dar această confuzie nu s-a soldat (din fericire?) cu un rezultat greşit, deoarece un mic calcul arată că produsul celor două puteri este într-adevăr 2592. Această situaţie a generat,

în mod natural, următoarea problemă: Care sunt soluţiile ecuaţiei (x la puterea y) (z la puterea x) = $xyzx$? În „American Mathematical Monthly", vol. 41, 1934, p. 332, s-a arătat că *unica* soluţie a acestei ecuaţii este cea semnalată mai sus (x = 2, y = 5, z = 9).

Numeroase alte „greşeli de tipar" de acest fel ilustrează fenomene similare, în care îşi fac efectul unele teoreme ascunse, care ne provoacă să le descoperim. De exemplu: produsul dintre 3 la puterea 4 şi 425 este egal cu... 34.425; produsul dintre 3 la puterea 4 şi 4.250 este egal cu... 344.250; produsul dintre 31 la puterea 2 şi 325 este tocmai... 312.325; produsul dintre 31 la puterea 2 şi 3.250 este egal cu... 3.123.250; produsul numerelor 73,9 şi 42 este egal cu produsul dintre 7 şi 3.942, iar cel dintre 73,9 şi 420 este egal cu produsul dintre 7 şi 39.420. Observăm că în primele patru egalităţi lucrurile s-au petrecut ca şi cum cifra care figura ca exponent era coborâtă la „parter", iar în ultimele două egalităţi ordinea cifrelor era păstrată, dar poziţia unor operaţii de multiplicare era modificată. Dar, de fiecare dată, această alterare a expresiei iniţiale rămânea fără efect asupra rezultatului. Iată şi alte exemple de acest fel: diferenţa dintre 9 la puterea a 2-a şi 1 la puterea a 2-a este egală cu 92 – 12 = 80, tot aşa cum diferenţa dintre 8 la puterea a 2-a şi 2 la puterea a 2-a este egală cu 82 – 22. În general, diferenţa dintre pătratul lui a şi cel al lui b, pentru $a + b = 10$ şi a superior lui b, este egală cu a2 – b2 (în cazurile de mai sus am avut $a = 9$ şi $b = 1$, în primul exemplu, şi a = 8 şi b = 2 în al doilea exemplu).

Frecvente sunt situaţiile în care tipografii plasează greşit semnul de extragere a rădăcinii pătrate sau al unui radical de ordin superior. Dar nu totdeauna se simt efectele unei greşeli de acest fel; ca în cele ce urmează: rădăcina pătrată aritmetică din 2 şi 2/3 este egală cu produsul dintre 2 şi rădăcina pătrată a lui 2/3; rădăcina pătrată din 3 şi 3/8 este egală cu produsul dintre 3 şi rădăcina pătrată a lui 3/8. Mai general, rădăcina de ordinul n din suma $a + a/(a^n - 1)$ este egală cu produsul dintre a şi rădăcina de ordinul n din $a/(a^n - 1)$ pentru orice a superior lui 1.

Alte „greşeli de tipar" se referă la omiterea, din fericire fără consecinţe, a simbolului factorial. Astfel, avem 1! = 1, 2! = 2, 1! + 4! + 5!

= 145 şi 4! + 0! + 5! + 8! + 5! = 40.585. În sfârşit, să mai menţionăm unele înmulţiri în care anumite permutări ale cifrelor rămân fără consecinţe asupra rezultatului înmulţirii: 102 x 402 = 201 x 204, 213 x 936 = 312 x 639, 213 x 624 = 312 x 426, 12 x 42 = 21 x 24, 13 x 62 = 31 x 26. În alte cazuri, rezultatul înmulţirii a două numere este format chiar cu cifrele celor două numere, într-o ordine adecvată: 21 x 87 = 1.827, 27 x 81 = 2.187, 35 x 41 = 1.435, 86 x 251 = 21.586.

Egalităţi interesante apar în folosirea unor numere mixte. Astfel, în egalitatea $11^2.(9 + 1/3) = 1.129 + 1/3$; totul se petrece ca şi cum coborârea lui 2 de la exponent la „parter" şi suprimarea parantezelor rămân fără influenţă asupra rezultatului. Situaţii similare apar în următoarele egalităţi: $11^2(93 + 1/3) = 11.293 + 1/3$, $11^2(933 + 1/3) = 112.933 + 1/3$, $21^2(4 + 9/11) = 2.124 + 9/11$, $13^2 (7 + 6/7) = 1.327 + 6/7$, $13^2(7.857.142 + 6/7) = 1.327.857.142 + 6/7$.

Alte exemple de „greşeli de tipar" benigne sunt indicate de Dudeny (*Amusements in Mathematics*, Scripta Mathematica, vol. 8, 1942, p. 78) şi Joseph Madachy (*Math. on Vacantion*, Charles Scribner's Sons, New York, 1967).

În toate exemplele de mai sus, caracterul benign al unor greşeli de tipar este rezultatul funcţionării unor teoreme care în unele cazuri au fost puse în evidenţă, în altele au fost lăsate în seama cititorilor.

Cum adunăm două fracţii?

Se ştie că unii elevi, în loc să adune fracţiile după regula $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$, procedează „mai simplu", adunând numărătorii între ei şi numitorii între ei. Prima regulă este considerată corectă, a două greşită; atât de greşită, încât, pe lângă nota 2, poate atrage şi ilaritatea generală. Totuşi, atâta vreme cât a, *b, c* şi *d* sunt simboluri abstracte, faptul de a considera una dintre reguli corectă şi cealaltă greşită este de natură pur convenţională. Numai în funcţie de o anumită utilizare pe care o avem în vedere problema capătă sens. Dacă, de exemplu,

cumpărăm întâi *a/b* kilograme de orez şi apoi *c/d* kilograme de orez, atunci cantitatea totală de orez cumpărată este: *a/b + c/d = (ad + bc)/bd*. Dacă însă un jucător de tenis a jucat, într-o lună, *b* partide, dintre care a câştigat a partide (fapt pe care-l reprezentăm prin *a/b*, iar în luna următoare a jucat *d* partide, dintre care a câştigat c partide; (fapt pe care-l exprimăm prin *c/d*), atunci, în total, el a jucat *b + d* partide, dintre care a câştigat a + c partide, deci, cu convenţia adoptată, *a/b + c/d = (a + c)/(b + d)*. Aceeaşi regulă funcţionează în cazul în care prin *a/b* înţelegem o pereche ordonată de numere, unde *a* este partea reală, iar *b* partea imaginară a unui număr complex; avem şi aici *a/b + c/d = (a + c)/(b +d)*. Este deci clar că *o regulă de operare nu este, în sine, nici corectă, nici greşită, ea este corectă sau greşită în funcţie de interpretarea şi utilizarea pe care le dăm simbolurilor.*

Unde este greşeala?

a) Este un loc comun faptul că populaţia planetei noastre era mult mai redusă în timpurile vechi decât în perioada recentă. Nu cumva s-ar putea demonstra contrariul? Fie n numărul oamenilor care se află în viaţă azi, 30 noiembrie 2001. Fiecare dintre aceşti oameni are 2 părinţi, 4 bunici, 8 străbunici ş.a.m.d. La a *m*-a generaţie, înapoi, numărul strămoşilor săi este puterea a m-a a lui 2. Considerând că o generaţie corespunde la vreo 30 de ani, va rezulta că, în urmă cu 30 *m* ani, numărul strămoşilor săi este dat de puterea de exponent *m* a lui 2. Pentru *n* persoane obţinem produsul dintre *n* şi puterea de exponent *m* a lui 2. Ţinând seama de faptul că puterea de exponent 10 a lui 2 este aproximativ egală cu 1000, ar rezulta că în urmă cu vreo 300 de ani trăiau cam de 1000 de ori mai mulţi oameni decât azi, iar în urmă cu 600 de ani cam de un milion de ori mai mulţi decât azi.

b) Ecuaţia $(5 - 3x) \cdot (7 - 2x) = (11 - 6x) \cdot (3 - x)$ a fost transcrisă greşit de un elev, sub forma $(5 - 3x) + (7 - 2x) = (11 - 6x) + (3 - x)$, obţinând astfel $12 - 5x = 14 - 7x$, deci $2x = 2$ şi $x = 1$. Şi totuşi, soluţia obţinută satisface şi ecuaţia iniţială! Încă un exemplu care arată că din

corectitudinea rezultatului nu rezultă corectitudinea rezolvării. Un alt elev „norocos" a simplificat exponentul 2 în raportul dintre pătratul lui $1 + x$ şi diferenţa dintre 1 şi pătratul lui x. Rezultatul este iarăşi corect: $(1 + x)/(1 - x)$, dar rezolvarea este de o notă egală cu exponentul simplificat.

c) 2 kilograme = 2.000 grame, 3 kilograme = 3.000 grame; multiplicând membru cu membru cele două egalităţi, un elev obţine, „egalitatea" 6 kilograme = 6.000.000 grame, ceea ce... întrece măsura. Un alt elev are ideea năstruşnică de a împărţi membru cu membru cele două egalităţi şi obţine nici mai mult, nici mai puţin că două treimi dintr-un kilogram sunt egale cu două treimi dintr-un gram. Un al treilea elev bate recordul demonstrând că o pisică are... şapte picioare. Cum a obţinut acest rezultat? A scris mai întâi ceea ce oricine ştie: 1 pisică are 4 picioare. Apoi a adăugat dedesubt: Nici o pisică nu are 3 picioare. După aceasta, a înlocuit ultimul enunţ prin altul „echivalent": Zero pisici au 3 picioare. Nu i-a rămas decât să adune membru cu membru cele două relaţii pentru a obţine cele şapte picioare ale unei singure pisici. De observat că tot atât de bine ar fi putut demonstra că o pisică are n picioare, n fiind un număr natural arbitrar.

Jonglerii algebrice

a) Orice număr este egal cu dublul său, pretinde un elev teribil. Într-adevăr, să scriem egalitatea banală: pătratul lui a minus pătratul lui a egal pătratul lui a minus pătratul lui a. Să scriem primul membru al egalităţii sub forma $a \cdot (a - a)$ (deci am dat factor comun pe a), iar al doilea membru ca produs al sumei prin diferenţă: $(a + a) \cdot (a-a)$. „Simplificând" prin $a - a$ se obţine $a = 2a$. Iată la ce poate duce împărţirea cu zero!

Tot aşa se poate „demonstra" că $1 = -1$. Pornind de la $x = 1$, ridicăm la pătrat şi obţinem $(x + 1)(x - 1) = 0$. „Simplificăm" cu $x - 1$ şi obţinem $x = -1$.

b) Pentru a „demonstra" că $i = 1$ (unde i este simbolul imaginar exprimând rădăcina pătrată a lui -1) pornim de la produsul rădăcinii de

ordinul 4 din 2 cu rădăcina pătrată din –1, produs care este egal cu produsul dintre rădăcina de ordinul 4 din 2 şi rădăcina de ordinul 4 din pătratul lui –1, produs la rândul său „egal" cu rădăcina de ordinul 4 din 2.

c) Logaritmul unui număr negativ este egal cu logaritmul valorii absolute a aceluiaşi număr, pretinde un elev. De ce? Pornim de la expresia 2 log a egală cu logaritmul pătratului lui a, la rândul său egal cu logaritmul pătratului lui $-a$, deci cu... $2\lg(a) = -a$. Din $2\lg a = 2\lg(-a)$ „deducem" $a = -a$ (prin „lg" am notat logaritmul într-o bază oarecare).

Tot aşa putem „demonstra" că $\lg(-1) = 0$.

d) La o clasă gimnazială, un elev a „rezolvat" în următorul fel ecuaţia $(a - x)/(1 - ax) = (1 - bx)/(b - x)$. Din $(a - x)(b - x) = (1 - ax)(1 - bx)$ se obţine printr-un calcul elementar şi după simplificarea cu diferenţa dintre pătratul lui x şi 1, egalitatea $1 = ab$. Însă simplificarea este permisă numai pentru x diferit de 1 şi de –1, aceste din urmă valori fiind chiar soluţiile ecuaţiilor.

e) Ecuaţia $(x + 1)(x + 1) - (x + 2)(x + 3) = (x + 4)(x + 5) - (x + 6)(x + 6)$ conduce, după desfacerea parantezelor, la egalitatea... $5 = 16$, simptom al faptului că ecuaţia nu admite nici o rădăcină finită. Tot la o egalitate imposibilă ($6 = 4$) conduce, prin operaţii nelegitime, şi ecuaţia $(6(x - 2) - 9(x - 3))/(x - 2)(x - 3) = ((x - 1) - 4(x - 4))/(x - 4)(x - 1)$; soluţia corectă este $x = 5$.

f) Să notăm cu y rădăcina pătrată a lui x şi cu z rădăcina pătrată a lui $x + 1$; apoi să considerăm ecuaţia $(y + 4)/(z + 7) = (y - 4)/(z - 5)$. După calcule elementare se ajunge la soluţiile 0 şi 12/5, dintre care numai a doua este valabilă (prima s-a introdus pe parcurs ca o rădăcină străină, printr-o operaţie de ridicare la pătrat, după cum arată o verificare directă). Interesant este aici faptul că aparenta rădăcină 0 putea fi ratată la un anumit moment, prin împărţirea cu x, ceea ce arată iarăşi că nu orice greşeală se repercutează asupra rezultatului.

De la greşelile şcolarilor la cele ale maeştrilor

În 1935 a apărut cartea lui M.Lecat *Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours* (Castaigne, Bruxelles), în care se semnalează vreo 500 de greşeli comise de vreo 330 de matematicieni, în încercarea de a rezolva unele probleme celebre, de la statutul postulatului paralelelor al lui Euclid, duplicarea cubului, trisecţiunea unghiului şi cuadratura cercului până la demonstrarea marii teoreme a lui Fermat. Mai toţi marii matematicieni au căzut victimă măcar odată câte unei greşeli de neatenţie sau de logică sau unei gafe rezultând din absenţa unei informaţii adecvate. Printre aceşti mari matematicieni se numără Abel, D'Alembert, Jakob şi Johann Bernoulli, Cauchy, Descartes, Euler, Fermat, Galilei, Gauss, Lagrange, Laplace, Legendre, Leibniz, Monge, Newton, Poincaré şi Steiner. Despre unele dintre ele am relatat anterior. Dintre lucrările care tratează acest subiect, vom mai menţiona cartea lui E.A. Maxwell (*Fallacies in Mathematics*, Cambridge, 1963) şi pe cea a lui J.S.Dubnow (*Fehler in geometrischen Beweisen*, M.S.B. nr.17, ediţia a treia, Berlin, 1967; traducere din limba rusă). Dar cartea care ne serveşte drept ghid în rândurile de faţă este aceea a lui W.Lietzmann (*Wo steckt der Fehler? Mathematische Trugschlüsse unde Warnzeichen*, ediţia a cincea, prelucrată şi completată de W.Oberländer şi E.Ludwig, Teubner, Leipzig, 1969).

O greşeală interesantă a apărut în legătură cu încercarea de a se rezolva o problemă bine cunoscută privind numerele prime. Două numere prime se numesc gemene dacă diferă prin 2. Numerele 5 şi 7 se află în această situaţie; la fel 11 şi 13 sau 17 şi 19. Problema pe care o avem în vedere se referă la faptul dacă există o infinitate de perechi de numere prime gemene. Nu se cunoaşte însă răspunsul la această întrebare. Cineva a crezut că i-a găsit răspunsul afirmativ, propunând următoarea „demonstraţie". Se ştie că Euclid a demonstrat că mulţimea numerelor prime este infinită. Ideea demonstraţiei constă în a considera produsul numerelor prime: mai mici sau egale cu p prim şi a adăuga acestui produs pe 1: $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots p+1$. Dacă numărul astfel

obţinut nu este prim, atunci el admite un divizor prin *a* mai mare decât *p*. Am demonstrat astfel că cel puţin unul dintre numerele a şi (2 • 3 • 5 • 7 • 11 • ... *p* + 1 este prim şi superior lui p, cu alte cuvinte fiind dat un număr prim *p*, există totdeauna un număr prim mai mare decât *p*.

Există deci o infinitate de numere prime. Cineva a crezut că dacă (2 • 3 • 5 • 7 • 11 ...*p* + 1 este număr prim, atunci şi (2 • 3 • 5 • 5 • 7 • 11... *p* – 1 este număr prim şi ia astfel naştere o pereche de numere prime gemene. (W.Lietzmann, *op.cit.*, p.14-15).

O satiră la adresa diletanţilor

Nu trebuie confundate greşelile inerente ale maeştrilor în procesul de tatonare a necunoscutului cu cele ridicule ale diletanţilor, care, în absenţa unei minime culturi matematice şi a simţului elementar al rigorii matematice, revendică paternitatea unor rezultate epocale. În această ordine de idei, este interesant să-l evocăm pe marele nostru matematician, Dan Barbilian. L-am avut profesor prima oară în anul universitar 1945-1946 şi îmi este vie şi acum satira pe care a lansat-o atunci la adresa diletanţilor. A inclus însă această satiră într-o ordine de idei mai amplă. Acest text a văzut lumina tiparului (Dan Barbilian, *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti; 1985, p.215-216) şi ni se pare instructivă reproducerea unor fragmente aici. Referindu-se la unele „probleme care au agitat antichitatea ori vremurile mai noi, probleme sterile, rău puse, dar despre care s-au scris zeci de tomuri uitate", Dan Barbilian scrie: „Dacă ne ocupăm totuşi în acest curs de câteva din ele, o facem din două motive. Mai întâi, demonstrarea imposibilităţii lor constituie o ilustraţie a teoriei lui Galois într-un domeniu, e drept, mai mult negativ".

„Al doilea motiv atinge o problemă de cultură generală şi, ca să zicem astfel, de ordine publică. Celebritatea enunţurilor de care vorbim (cum ar fi aceea a cuadraturii cercului) le dă o circulaţie nedorită. Ele au căzut de mult în domeniul comun. Sensul în care însă au fost, de

mult, hotărâte aceste întrebări nu a ajuns la cunoştinţa marelui public, sau, mai degrabă, publicul nu vrea să ţină seama de el".

„Astfel, o întreagă categorie de diletanţi aparţinând mai tuturor naţiunilor şi recrutaţi din cele mai variate cercuri: funcţionari de bancă, avocaţi de provincie, învăţători, doctori fără clientelă, profesori de liceu neinformaţi se cheltuieşte zadarnic în a căuta să rezolve probleme pentru care nu au nici o pregătire, şi anume în sensul pozitiv al întrebării; dovedit matematiceşte de mult, ca imposibil. Toţi visează să trisecteze unghiul, să cuadreze cercul sau să dubleze altarul lui Apollon din Delos".

„Academiile sunt inundate periodic de «soluţiile lapidare», reduse la câteva rânduri de mizerabile silogisme, ale unor maniaci".

„Această tenace gintă formează un fel de internaţională, în felul filateliştilor, întreţine o bogată corespondenţă în care se plânge de neînţelegerea ştiinţei oficiale şi se mângâie cu justiţia posterităţii. Cunoştinţele lor în matematică nu trec în cele mai bune cazuri de nivelul şcolii secundare. Ceea ce îi uneşte mai ales este oroarea de a se informa şi un anume arsenal de argumente iluministe".

„Drept că nu argumentele teoriei lui Galois sunt cele mai potrivite pentru a descuraja trisectorii şi duplicatorii. Dar nici alte argumente mai elementare nu au putere asupra lor. Felix Klein, pentru a combate această formă a semidoctismului, printre profesorii de liceu, a ţinut câteva veri la Göttingen o serie de conferinţe, tipărite mai apoi sub titlul *Elementar-mathematik von-einem höheren Standspunkt aus.* E o carte admirabilă, în care problemele istorice sunt respinse prin argumente elementare, foarte ingenioase. Dar e o carte tot pentru matematicieni şi foarte puţin pentru diletanţi".

„Zelul cuadratorilor, al euclidienilor sau al trisectorilor n-a scăzut, nici n-a crescut, cu apariţia acestor volume".

Aspecte anecdotice

Vom prezenta acum, în acţiune, un „trisector al unghiului"; este vorba de o scrisoare primită de către W.Lietzmann de la un cititor după

apariţia primei ediţii a cărţii sale menţionate mai sus. Fie un unghi cu vârful în punctul *O*. Corespondentul lui Lietzmann pretinde că-l împarte în trei părţi egale, cu rigla şi compasul, în modul următor. Pe una dintre laturile unghiului consideră un segment *OA*, pornind din vârf şi încă două puncte, B şi C, pe aceeaşi latură şi în acelaşi sens, astfel încât $OA = AB = BC$. Trasează apoi cercul cu centrul în *O* şi de rază *OB* şi notează cu B_1 punctul de intersecţie al acestui cerc cu cealaltă latură a unghiului cu vârful în *O*. Fie M mijlocul arcului de cerc BB_1 cuprins între laturile unghiului considerat. Se trasează cercul cu centrul în *O* şi de rază *OC* şi se notează cu C_1 intersecţia sa cu cealaltă latură a unghiului cu vârful în *O*. Se poartă apoi arcul BM pe arcul CC_1, din *C* până într-un punct pe care îl notăm cu *N*. Corespondentul lui Lietzmann are naivitatea să creadă că unghiul *CON* este a treia parte din unghiul COC_1; Însă arcele *BM* şi *CN* nu sunt egale; numai în cercuri egale la coarde egale corespund arce egale.

Să încheiem acest paragraf cu unele exemple anecdotice. Primul se referă: la „demonstraţia" dată de un elev teoremei lui Pitagora. Dacă pătratul ipotenuzei este egal cu 2, iar pătratul fiecărei catete a unui triunghi este egal cu 1, atunci avem evident 2 = 1+1, deci teorema lui Pitagora se verifică: 2 = 1+1. Să înlocuim acum pe 2 cu a^2, pe 1 cu b^2 şi pe 1 cu c^2. Obţinem tocmai teorema lui Pitagora.

A doua anecdotă ne „învaţă" că logaritmul unui număr x este egal cu logaritmul opusului – x. Într-adevăr, primitiva funcţiei 1/x este ln x+c. Înlocuind în relaţia „Integrală din (dx)/x = ln x + c pe *x* cu *–x*", obţinem relaţia „Integrală din (d(–x)/(–x)=ln(–x)+c"; deci prin simplificarea cu –1, obţinem „Integrală, din (dx)x = ln(–x) + c"; însă două cantităţi egale cu a treia sunt egale între ele, deci ln (–x) = ln x. Iată ce se întâmplă când nu suntem atenţi la modul şi teritoriul de definiţie ale funcţiilor cu care lucrăm şi uităm că dx sub semnul integralei nu înseamnă diferenţiala lui x.

O a treia anecdotă se va referi la funcţiile pare şi la cele impare. Vom „demonstra" că orice număr par este egal cu zero şi orice număr

impar este egal cu 1. Pornim de la egalitatea care afirmă că puterea de exponent $2n$ a lui -1 este egală cu 1 şi, logaritmând în ambii membri, obţinem $2n \lg(-1) = \lg 1 = 0$, deci $2n = 0$ sau $\lg(-1) = 0$. Însă puterea de exponent $2n+1$ a lui 1 este egală cu -1 şi, logaritmând în ambii membri, se obţine $(2n+1) \lg(-1) = \lg(-1)$, deci $2n+1 = 1$ şi $2n = 0$. Iată efectele dezastruoase ale calculului formal, care nu se mai sinchiseşte de legitimitatea operaţiilor şi de teritoriul pe care o anumită funcţie este definită.

Capcane ale exponenţialelor şi logaritmilor

Cum rezolvăm ecuaţia ((3/4) la puterea x) = (4/3) la puterea 7)? Un elev a rescris această ecuaţie sub forma egalităţii dintre puterea de exponent (x + 7) a lui 3 şi puterea de exponent (x+7) a lui 4, de unde 3 = 4, deoarece dacă două puteri de acelaşi exponent sunt egale, atunci şi bazele celor două puteri sunt egale. Însă această regulă este valabilă numai dacă exponentul este nenul; altfel, ţinând seamă că puterea de exponent zero a oricărui număr diferit de zero este egală cu 1, ar rezulta că toate numerele diferite de zero sunt egale între ele. Tocmai valoarea x = –7, care anulează exponentul comun celor doi membri, este rădăcina corectă a ecuaţiei, cum se poate vedea uşor şi printr-o verificare directă.

Pentru a evita parafrazele de mai sus, să convenim a nota cu u exp v puterea de exponent v a lui u: Fie ecuaţia (2/3) exp lg x + (3/2 exp lg x = 13/6, unde logaritmul este considerat în baza 10. Un elev a propus următoarea abordare. Amplificând prima fracţie cu 2 şi a doua fracţie cu 3; se obţine (4 exp lg x)/(6 exp lg x) + (9 exp lg x)/(6 exp lg x) = 13/6, de unde rezultă lg x = 1, deci x = 10. Un al doilea elev a procedat după cum urmează: lg x lg (2/3) + lg x (3/2) = lg (13/6), deci lg x (lg (2/3) + lg (3/2) = lg 13/6, aşadar lg x lg (16/6) = lg (13/6), de unde rezultă lg x = 1 şi x = 10. Un al treilea elev a pornit de la relaţia lg a + lg b = lg ($a \cdot b$), deducând lg x (lg(2/3) + lg (3/2) = lg ((2/3) · (3/2) exp lg x. Însă lg (2/3)+ lg (3/2) = lg ((2/3) (3/2)), deci lg x · lg 1 + lg 1, de unde

rezultă lg$x$ =1 şi x = 10. Nu este greu de văzut că toţi cei trei elevi au greşit. Primul nu a respectat regulile de calcul cu puteri, al doilea nu a respectat regulile de calcul cu logaritmi, iar al treilea a comis mai multe erori, printre care şi împărţirea cu zero. S-a găsit însă un al patrulea elev, care a indicat o soluţie corectă, notând cu y pe (2/3) exp lg x, de unde (3/2) exp lg x = 1/y, deci y + 1/y = 3/6 şi y^2 – (13/6)y+1 = 0, deci se obţin soluţiile 3/2 şi 2/3. De aici deducem (2/3) exp lg x = 2/3, de unde rezultă lg x = 1 şi x = 10 şi (2/3) exp lg x+ 3/2, de unde rezultă că lg x = –1, deci x = 1/10. Cele două rădăcini ale ecuaţiei iniţiale, în x, sunt deci 10 şi 1/10.

Inegalităţi cu sau fără module

1) Fie a şi b două numere strict pozitive. Este adevărat că |a+b| > |a –b|? Un elev pretinde că răspunsul este afirmativ, argumentând în modul următor. Avem |a+b| = |a| + |b| > |a| – |b| = |a-b|, deci, prin tranzitivitate, |a+b| > |a-b| . Însă aici s-a comis un abuz: egalitatea |a| – |b| = |a – b| nu este adevărată totdeauna, mai precis, este falsă dacă b este superior lui a. O abordare corectă este următoarea: deoarece a şi b sunt strict pozitive, a + b este strict superior lui a, care la rândul său este strict superior lui a – b. Prin tranzitivitate, rezultă că a + b este strict superior lui a-b. Din pozitivitatea lui a+b rezultă |a+b| > |a – b|.

2) Este adevărat că din ab > cd şi ae > cf rezultă bf > ed? (a, b, c, d, e şi f) desemnează, toate, numerele strict pozitive). Un elev împarte primele două inegalităţi membru cu membru şi obţine b/e > d/f, de unde obţine imediat, prin înmulţire cu ef, inegalitatea dorită, deci răspunsul afirmativ la întrebarea de mai sus. Însă raţionamentul său este abuziv, deoarece prin împărţire membru cu membru două inegalităţi de acelaşi sens nu conduc neapărat la o inegalitate de acelaşi sens. De exemplu, 1 este inferior lui 2, iar 2 este inferior lui 10, însă 1/2 nu este inferior lui 2/10 = 1/5. Nu este greu de văzut că, în general, în condiţiile inegalităţilor ab > cd şi ae > cf, nu se poate spune nimic despre relaţia dintre bf şi ed.

3) Pentru care valori ale lui a şi b are loc inegalitate $a/b + b/a > 2$? Un elev a propus următorul răspuns: eliminând numitorii, obţinem $a^2 + b^2 > 2\,ab$, deci $a^2 - ab > ab - b^2$, cu alte cuvinte, $a\,(a - b > b\,(a-b)$ şi prin simplificare cu $a - b$, rezultă $a > b$; deci inegalitatea propusă este corectă pentru $a > b$. Însă elevul nostru a ignorat faptul că ceea ce se află la numitor nu are nevoie să se anuleze, iar împărţirea cu zero nu este permisă. Este clar că trebuie ca a şi b să fie diferiţi de zero. Se mai observă că a şi b trebuie să fie de acelaşi semn; altfel, cei doi termeni din primul membru sunt amândoi negativi, deci suma lor poate întrece pe 2. Inegalitatea care se obţine după eliminarea numitorilor conduce la $a^2 - 2\,ab + b^2 > 0$, deci $(a - b) > 0$, cu alte cuvinte inegalitatea din enunţ este satisfăcută ori de câte ori a şi b sunt diferite între ele, amândouă strict pozitive sau amândouă strict negative.

Gândirea lui Euclid

În cartea a IX-a a *Elementelor* sale, Euclid (320-275 înaintea erei nostre) se ocupă, între altele, de teoria numerelor prime, stabilind două teoreme care se află şi azi la baza acestei teorii. Astfel, propoziţia 14 revine la ceea ce azi numim teorema de unicitate a descompunerii unui număr natural în factori primi. Practic, Euclid consideră cazul particular al unui număr A care este produsul a doi factori primi, B şi C, şi arată că presupunerea existenţei unui număr prim D, distinct de B şi de C, prin care s-ar divide exact A, duce la o contradicţie. Tot pe un caz particular procedează şi în ceea ce priveşte demonstrarea propoziţiei 20, care afirmă că mulţimea numerelor prime este infinită. Este interesant aici să reproducem chiar modul de exprimare folosit de Euclid:„Numerele prime există în număr mai mare decât orice cantitate de numere prime dată înainte“. Şi aici, Euclid raţionează prin reducere la absurd: Să admitem că A, B şi C sunt numere prime; în acest caz, produsul lor mărit cu o unitate $ABC + 1$ sau este prim, obligatoriu diferit de A, B şi C, sau nu este prim, dar se împarte exact la un număr prim D. Însă D nu poate coincide cu nici unul dintre numerele A, B, C,

deoarece dacă ar coincide, de exemplu, cu *A*, atunci fiind divizor şi pentru numărul *ABC*+1, ar trebui să fie divizor al unităţii, ceea ce este absurd. Prin urmare, există un număr prim diferit de *A*, *B* şi *C*".

Am folosit, în cele de mai sus, *Istoria matematicii în antichitate*, de E.Kolman (Editura Ştiinţifică, 1963, p. 141-142). Există însă versiunea românească a *Elementelor* lui Euclid, realizată de Victor Marian şi publicată în anii 1939-1941. După cum se poate vedea uşor, raţionamentul lui Euclid, deşi efectuat pe un caz particular, este în esenţă valabil în cazul general. Ne vom opri în mod special la teorema a doua. Euclid a fost frapat de faptul că, pe măsură ce înaintăm în şirul numerelor naturale, numerele prime se întâlnesc tot mai rar, ceea ce creează bănuiala că de la un anumit număr mai departe ele ar putea să nu mai apară de loc. Iată deci o întrebare firească: există un cel mai mare număr prim? Euclid obţine răspunsul negativ, demonstrând ceea ce azi s-ar putea enunţa în modul următor: oricare ar fi numărul natural n, dacă există n numere prime, atunci există şi un al (n+1)-lea număr prim.

Comentariul lui Dan Barbilian

Un elev de gimnaziu mi-a pus, la o întâlnire recentă, o întrebare fermecătoare prin naivitatea ei: cine a inventat matematica? Deoarece nu a existat un asemenea inventator, putem înlocui întrebarea de mai sus cu altele, mai adecvate, de exemplu cu întrebarea: cine a dat prima construcţie axiomatic-deductivă de amploare, în matematică? Dacă au fost mai mulţi (unele civilizaţii neeuropene revendică şi ele înfăptuiri similare), Euclid s-a numărat în orice caz printre ei. Demonstraţia sa privind infinitatea mulţimii numerelor prime se detaşează ca una dintre cele mai frumoase din întreaga sa operă. Prin simplitatea ei profundă, această demonstraţie a creat un tip de raţionament care nu şi-a pierdut nici astăzi importanţa. Vom invoca, în această privinţă, pe matematicianul român Dan Barbilian, care a publicat un amplu studiu privind importanţa pe care demonstraţia lui Euclid o prezintă pentru algebra modernă (a se vedea articolul său *Argumentul lui Euclid asupra*

infinităţii numerelor prime, în revista „Studii şi cercetări Matematice", 1957, nr.1-2, p.7-72). Nu vom intra aici în substanţa acestui studiu de matematică superioară, dar vom menţiona comentariul introductiv, al lui Dan Barbilian, de natură să atragă atenţia şi începătorilor asupra razei de acţiune pe care o poate avea un raţionament matematic profund, care merge la originea fenomenelor.

„Modul lui Euclid de a conchide la infinitatea numerelor prime, îndelung banalizat de învăţământul în clase, apare totuşi (regândit, restituit momentului său originar) ca una din cele mai înaripate încorporări ale geniului elinesc".

„Esenţial, concis şi fecund, acest raţionament aritmetic – altfel decât raţionamentele geometrilor vechi: succesive, greoaie, prin detalierea tuturor cazurilor de figură; la fel, poate, cu unele apoftegme ale filozofilor sau unele versuri ale aezilor – închide pentru noi, într-o fracţiune de durată, întreg miracolul grec".

„Puterea lui demonstrativă e departe de a fi istovită. Teoreme însemnate de aritmetică, a căror întemeiere în ipoteze cât mai generale reclamă şi astăzi resursele analizei, se lasă stabilite algebric, câteodată chiar elementar, prin acţiunea acelui argument perenic, abia modernizat".

„În Nota de faţă dezvoltăm câteva observaţii făcute cu ocazia unui curs introductiv de Teoria numerelor şi având argumentul lui Euclid drept comună măsură. Nota conţine: 1. Transpunerea în necomutativ a teoremei relative la descompunerile în produse de elemente ireductibile din inelele cu element unitate (...); 2. Izolarea nucleului algebric al teoremei analitice asupra infinităţii idealelor prime de grad 1 din corpurile de numere algebrice; 3. O demonstraţie elementară, cu schematismul lui Euclid, a cazului special $p=nr+1$ al teoremei lui Dirichlet asupra progresiei aritmetice (...); 4. (...) Schema demonstraţiei elementare, a cazului special $p=nr+1$, al progresiei aritmetice, o datorăm unei comunicări orale a d. A. Châtelet (...) Domnia-sa afirmă că demonstraţia ar aparţine lui Hilbert, (...). E vorba, cred, mai degrabă de o variantă (foarte interesantă, în care argumentul lui Euclid apare într-un vestmânt neaşteptat) a demonstraţiei algebrice a lui E.Wendt (...)".

Deformarea argumentului lui Euclid

Cititorul se poate întreba de ce discutăm despre toate acestea la un capitol dedicat greşelii. A venit momentul să explicăm acest lucru. În unele cărţi, teorema lui Euclid privind infinitatea mulţimii numerelor prime este demonstrată pe o cale modificată faţă de aceea indicată de Euclid. Faptul n-ar trebui să mire. În principiu, orice teoremă poate fi demonstrată în mai multe feluri şi, de obicei, nu demonstraţia iniţială este cea mai simplă. Numai că în cazul teoremei lui Euclid două fapte atrag atenţia. În primul rând, nici o demonstraţie ulterioară lui Euclid nu întrece ca simplitate şi eleganţă demonstraţia dată de Euclid. În al doilea rând, calea modificată despre care am vorbit mai sus nu pare să fie rezultatul unei opţiuni, ci mai degrabă efectul unei scăpări de atenţie. Iată despre ce este vorba: în loc să se considere, ca la Euclid, produsul primelor *n* numere prime, se lucrează pur şi simplu cu factorialul lui *n*, unde *n* este presupus (prin reducere la absurd) că ar fi cel mai mare număr prim. Suma dintre acest factorial şi unu sau este un număr prim, sau admite un divizor prim superior lui *n*. În ambele situaţii ne aflăm în prezenţa unui număr prim superior lui *n*, deci se obţine o contradicţie care demonstrează teorema lui Euclid. Se constată deci că înlocuirea produsului numerelor prime până la *n* prin factorialul acestuia din urmă, adică produsul tuturor numerelor naturale până la *n*, nu invalidează demonstraţia teoremei lui Euclid, reducându-i însă din simplitate şi eleganţă, deoarece pe măsură ce *n* creşte, factorialul lui n este de un ordin de mărime superior produsului numerelor prime până la *n*. Am putea spune că demonstraţia modificată introduce o anume redundanţă. Explicaţia apariţiei acestei modificări pare a fi următoarea: de obicei, produsul numerelor prime până la n (n prim) este scris sub forma 2-3... *n*, confuzia cu factorialul 1.2.3.4...*n* devenind foarte plauzibilă. Modificarea nu a fost intenţionată, autorii respectivi nu au avut probabil conştiinţa faptului de a fi trădat gândirea lui Euclid. Au trădat-o într-adevăr? Ideea de bază nu rămâne aceeaşi ? Numai într-o anumită măsură. Ampla discuţie pe care o dezvoltă Dan Barbilian arată că

în algebra modernă argumentul lui Euclid privind infinitatea numerelor prime este recuperat esenţial în forma sa originară. Primalitatea factorilor se dovedeşte a fi fundamentală.

Iată deci că, măcar uneori, întoarcerea la textele maeştrilor este revelatoare şi în ştiinţă, unde de obicei îi citim pe clasici prin intermediul expunerilor moderne.

Este curba un concept geometric?

Suntem înclinaţi să dăm un răspuns afirmativ acestei întrebări . Acest răspuns este însă numai parţial corect, deoarece curba se defineşte ca un cuplu format dintr-o aplicaţie continuă f a unui interval compact $[a, b]$ în spaţiul euclidian cu două sau cu trei dimensiuni (după cum este vorba de o curbă plană sau o curbă în spaţiu) şi imaginea acestei aplicaţii, adică mulţimea punctelor din plan (sau din spaţiu) care se obţin ca valori ale acestei aplicaţii. Constatăm deci că o curbă are două componente, una analitică, alta geometrică. Deoarece direct vizibilă nu poate fi decât cea de a doua componentă, riscul de a greşi este mare; cu atât mai mult cu cât chiar a doua componentă nu este totdeauna vizibilă, datorită faptului că imaginea unei aplicaţii continue nu poate fi trasată efectiv decât dacă aplicaţia are derivată continuă (cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte). Un exemplu va fi edificator. Se ştie că există funcţii reale continue pe $[a, b]$, care nu sunt derivabile în nici un punct din $[a, b]$. Fie g şi h două astfel de funcţii. Să definim cu ajutorul lor o aplicaţie continuă f a lui $[a, b]$ în spaţiul euclidian cu două dimensiuni (adică în plan). Putem figura unele puncte (f, t), dar nu putem reprezenta vizual întreaga imagine a curbei considerate, din cauza limitelor existente în posibilităţile noastre de a reprezenta geometric o mulţime infinită de puncte. Această posibilitate se realizează atunci când putem trasa în mod continuu mulţimea respectivă, imprimând inevitabil creionului nostru o direcţie în fiecare punct (cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte, în care putem schimba brusc direcţia). Putem deci trasa graficul unei curbe cu tangentă continuă, dar nu şi pe acela al unei curbe fără tangentă.

Ajungem acum la problema lungimii unei curbe. Modul natural de a proceda este acela al aproximării prin linii poligonale înscrise. Ca și în studiul integralei, considerăm o diviziune d a intervalului [*a*, *b*], căreia îi asociem o linie poligonală *l (d)* înscrisă în imaginea curbei, după cum urmează. Dacă *t* este o valoare în [*a*, *b*], atunci punctul *f(t)* de coordonate *g(t)*, *h(t)* va fi situat pe imaginea curbei definite de *f*. Atribuim rolul lui *t fiecărui punct al diviziunii d*. Pentru două puncte *s* și *t* ale diviziunii considerăm segmentul de dreaptă care unește pe *f (s)* cu *f (t)* și calculăm lungimea acestui segment (după regulile învățate la geometria analitică). Procedăm astfel pentru toate perechile consecutive de puncte ale diviziunii *d* și facem suma *l(d)* a lungimilor și segmentelor astfel obținute. Marginea superioară a mulțimii de numere l*(d)* crește sau stă pe loc. Este deci firesc să ne îndreptăm atenția asupra tendinței de creștere a valorilor *l(d)*, fapt realizat prin considerarea marginii superioare.

Să considerăm acum o curbă *f* definită pe [0, 1], cu valori în plan, după cum urmează: abscisa *g(t)* a punctului *f(t)* este egală cu ordonata sa *h(t)* oricare ar fi *t* în intervalul [0, 1]. Să luăm mai întâi *g(t)* = *h(t)*=*t*. Obținem o curbă a cărei imagine este diagonala pătratului unitate din primul cadran, diagonală situată pe prima bisectoare a axelor de coordonate. Lungimea acestei curbe este evident rădăcina pătrată aritmetică a lui 2. Dacă acum luăm *g(t)* = *h(t)* = 0 funcție continuă pe [0, 1], care nu este derivabilă în nici un punct din [0, 1], curba obținută va avea aceeași imagine ca și curba precedentă. Vom fi astfel tentați să-i atribuim aceeași lungime. Însă procedând la evaluarea acestei lungimi după metoda prezentată mai sus, care se prevalează de comportamentul lungimilor *l(d)* ale liniilor poligonale asociate diferitelor diviziuni *d* ale lui [0, 1], vom constata că marginea superioară a mulțimii de numere *l(d)* este infinită, deci cu aceeași imagine geometrică pe care o are curba precedentă, nu mai are lungimea egală cu radical din 2, ci cu infinit.

Explicația acestui paradox se află tocmai în imposibilitatea de a reduce curba la suportul ei geometric. Noțiunea matematică de curbă nu se reduce la aceea de mulțime de puncte de un anume tip, ci

urmăreşte şi modul în care această mulţime este parcursă. În cazul nostru, trebuie să ne: imaginăm un fir infinit de lung, dar fără grosime (deci un fir ideal), pe care-l desfăşurăm de-a lungul primei bisectoare a axelor, între punctele (0, 0) şi (1, 1), răsucindu-l şi întorcându-l din drum, de fiecare dată când ajungem la una dintre extremităţi. Aceasta este situaţia dacă g(t) = h(t) = 0 funcţie continuă, care nu este derivabilă în nici un punct din [0, 1].

Este geometria o ştiinţă?

Această întrebare bizară a fost formulată de Saunders MacLane (*Mathematics. Form and Function*, Springer Verlag, New York, 1986, p. 91), iar discuţia ei se plasează oarecum natural în ordinea de idei a paragrafului precedent. În special în ultimele rânduri ale acestui paragraf am fost confruntaţi cu o experienţă relativ primitivă în care spaţiul şi mişcarea sunt deopotrivă implicate. Suntem tentaţi să considerăm sistemul axiomatic-deductiv al geometriei euclidiene drept un compartiment al unei ştiinţe a spaţiului, exact aşa cum mecanica este ştiinţa mişcării, iar biologia este ştiinţa formelor vii. Dar dacă ar fi aşa, consideră MacLane, ar trebui ca această ştiinţă să fie unică, ceea ce nu este cazul (a se vedea geometriile neeuclidiene). Geometria este „extrasă" din experienţă, dar noi nu testăm experimental teoremele de geometrie, aşa cum testăm propoziţiile fizicii. Chiar dacă măsurătorile ar contrazice, pentru un triunghi dreptunghic particular, teorema lui Pitagora, noi nu am pune sub semnul îndoielii această teoremă. Mai degrabă vom modifica procedeele de măsurare a lungimilor şi unghiurilor, unităţile de măsură utilizate sau cumva vom considera că aceste măsurători aparţin unei alte teorii geometrice. Un cunoscut filozof al ştiinţei, Karl Popper (tradus şi în româneşte prin una dintre operele lui principale), a propus drept criteriu de recunoaştere a caracterului de ştiinţă pe care-l are sau nu o anumită disciplină capacitatea enunţurilor ei de a putea fi falsificate; or, după cum observă MacLane, enunţurile geometrice nu au această proprietate.

Ce este atunci geometria? Este o structură intelectuală foarte complexă, eterogenă, având rădăcini în întrebări relative la experienţa umană a mişcării, a construcţiei şi a formelor. Propoziţiile geometriei intervin în orice ştiinţă a mişcării, în toate practicile inginereşti ale construcţiei. Însă structura geometrică nu este unic determinată. Axiomele ei pot fi manipulate în diferite feluri, care merg de la tradiţia euclidiană la versiunea propusă de Hilbert sau la aceea în spiritul teoriei grupurilor. Geometriile neeuclidiene sunt la fel de posibile şi de utile ca şi geometria euclidiană, deoarece şi primele şi a doua au originea în experienţa noastră cu spaţiul şi cu mişcarea . Însă acest studiu conduce şi la alte structuri, mai puţin geometrice, ca distanţa şi unghiul, la manipularea lor algebrică, la numere reale şi funcţii. În aceeaşi ordine de idei, a unor structuri compozite, în care geometricul şi negeometricul intră deopotrivă, în diferite proporţii, variabile de la o situaţie la alta, intră şi problema lungimii curbelor, a statutului însuşi al conceptului de curbă. Un alt aspect este cel al structurii algebrice de grup implicate organic în problema transformărilor geometrice. Logica îşi are şi ea partea ei. Nu este geometria euclidiană primul exemplu, în ordine istorică, de structură deductivă de amploare? Conceptul delicat de continuitate, care aparţine nu geometriei, ci analizei matematice, este, după cum am văzut, esenţial în definirea ideii de curbă (pentru a păstra o minimă legătură cu suportul ei vizual).

Axiomatizarea geometriei s-a prevalat de idei ca *dreaptă*, *plan*, *unghi*, *triunghi*. Dezvoltări ulterioare au implicat şi idei mai rafinate, ca *orientarea* şi *compunerea transformărilor (mişcărilor)*. Geometria este un conglomerat foarte elaborat de percepţii, deducţii, figuri şi idei. Credem că nu trădăm gândirea lui Mac Lane (unul dintre creatorii teoriei categoriilor, care a schimbat radical imaginea de ansamblu a matematicii, începând cu deceniul al cincilea al secolului trecut), dacă spunem că geometria, în structura ei atât de eterogenă, are o componenţă ştiinţifică, dar nu se reduce la această componentă, deoarece implică o experienţă umană mai complexă.

Capcanele tangentei

Riscurile reducerii chestiunilor de Analiză matematică la aspectul lor vizual apar şi în activitatea practică cea mai elementară.

Ce este o tangentă la o curbă? „O dreaptă care are în comun cu ea un singur punct", se grăbesc unii să răspundă. Totuşi, dreptele de forma x = constant au în comun cu parabola $y = x^2$ câte un singur punct; dar nu sunt tangente la parabolă, după cum se vede imediat pe o reprezentare grafică. „Tangenta este o dreaptă care atinge curba într-un singur punct", încearcă un elev să repare răspunsul anterior, distingând astfel un punct de intersecţie de unul de atingere. Însă dreapta $y = 1$ (ca şi dreapta $y = -1$), atinge curba sinusoidală. $y = \sin x$ într-o infinitate de puncte şi totuşi este tangentă la această curbă. „Tangenta la o curbă c într-un punct p este o dreaptă care are în comun cu c punctul p, în aşa fel încât există o vecinătate V a lui p pentru care intersecţia lui V cu imaginea curbei c se află de o singură parte a dreptei considerate", precizează un alt elev, pentru a obţine astfel explicaţia celor două exemple de mai sus. Într-adevăr, după noua definiţie dreapta $x = 3$ nu mai este tangentă la parabola $y = x^2$, în timp ce dreapta $y = 1$ este tangentă la curba $y = \sin x$ într-o infinitate de puncte. Ne aflăm deci în progres faţă de „definiţiile" precedente. Dar ce ne facem, la aceeaşi curbă sinusoidală, cu dreapta $y = x$, care, după ultima tentativă de definire a tangentei, n-ar fi tangentă în origine la $y = \sin x$; ce ne facem cu situaţia în origine a axei absciselor faţă de parabola cubică $y = x^3$? O simplă privire a reprezentărilor grafice respective arată că a exclude cazurile de acest fel din situaţiile de tangenţă ar fi inacceptabil. Totuşi, după ultima „definiţie", nu avem nici un fenomen de tangenţă, deoarece nu există nici o vecinătate a punctului de contact în care imaginea curbei să rămână de o singură parte a tangentei. Deci, deşi în progres faţă de „definiţiile" anterioare, nici a treia versiune nu este acceptabilă.

Cum ieşim din această încurcătură? Cum putem prinde, într-o singură formulare riguroasă, toate variantele posibile ale fenomenului de

tangenţă a unei drepte la o curbă? Pentru curbele plane de forma $x = t$, $y = f(t)$, unde f este continuă pe [a, b] fenomenul de tangenţă se defineşte riguros făcându-se apel la mijloacele Analizei matematice. Avem nevoie de noţiunea de derivată a unei funcţii într-un punct. Curba definită de f are tangentă în punctul de abscisă u dacă funcţia f are derivată în u. Valoarea acestei derivate este coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul de abscisă u, deci individualizează această tangentă (deoarece i se cunoaşte şi punctul de tangenţă, de coordonate $u, f[(u)]$.

Rezultă deci că existenţa tangentei la curbă în punctul de abscisă u este echivalentă cu existenţa derivatei (finite sau infinite) funcţiei f în u. Derivata infinită revine la o tangentă paralelă cu axa ordonatelor. În exemplele de mai sus, derivata în origine a sinusului este egală cu 1, prima bisectoare a axelor este tangentă în origine la sinusoida $y = \sin x$; derivata în origine a parabolei cubice este egală cu zero, deci tangenta în origine la parabola cubică este axa absciselor. Derivata în origine a funcţiei egale cu –1 pentru x negativ, cu + 1 pentru x pozitiv şi cu zero în origine admite în origine derivata egală cu plus infinit, deci tangenta în origine este chiar axa ordonatelor. Însă funcţia în discuţie este discontinuă în origine, deci nu mai defineşte o curbă. Acest fapt explică situaţia stranie, din punct de vedere grafic, a tangentei în origine.

Unde a dispărut leul?

O veche istorioară spune că trei prieteni, după o consumaţie care a totalizat 25 de lei, au înmânat ospătarului trei bancnote a câte zece lei. Au primit restul de 5 lei, din care n-au reţinut decât 3 lei, fiecare câte un leu. Rezultă că fiecare a plătit 9 lei, deci în total 27 de lei, dar a mai rămas un rest de 5-3 = 2 lei. Deoarece 27 + 2 = 29 lei, se întreabă unde a dispărut diferenţa de un leu până la suma totală de 30 de lei, existentă iniţial.

O problemă cu o pâine

Am propus unei clase gimnaziale următoarea problemă: am o pâine. Mănânc astăzi jumătate din ea, mâine mănânc jumătate din ceea ce mi-a rămas azi, poimâine jumătate din ceea ce îmi rămâne mâine şi aşa mai departe. După câte zile termin de mâncat pâinea?

Răspunsurile au fost diferite. Unii au afirmat că pâinea nu se termină niciodată, deoarece în fiecare zi îmi mai rămâne ceva. Alţii au pretins că nu se poate da răspunsul atâta vreme cât nu se precizează mărimea pâinii; nu este natural ca durata de mâncare a pâinii să depindă de mărimea ei? Ambele răspunsuri sunt plauzibile, pline de bun-simţ, dar corect este numai primul răspuns. Într-adevăr, cantităţile de pâine mâncate formează termenii unei progresii geometrice infinite, în care primul termen este egal cu 1/2, iar raţia este de asemenea egală cu 1/2. Suma acestei progresii este egală cu 1, deci pentru consumarea întregii pâini este nevoie de o infinitate de zile, ceea ce ar pretinde ca fiinţa care o mănâncă să fie... nemuritoare. De ce, totuşi, răspunsul al doilea este şi el plauzibil? Deoarece, în conformitate cu experienţa comună, durata de mâncare a unei pâini depinde de mărimea pâinii. Numai că această experienţă este de natură finită, ea are în vedere procese de durată finită. În problema noastră este vorba de un proces de durată infinită, în care parametrul „mărimea pâinii" este, ca să spunem aşa, neutralizat. Răspunsul nu depinde de mărimea pâinii.

O problemă cu cinci pâini

Este vorba de faimoasa problemă care apare în povestea *Cinci pâini* a marelui povestitor moldovean Ion Creangă. Datele problemei sunt următoarele: O persoană A are 3 pâini, o altă persoană, B, are 2 pâini. Cele cinci pâini sunt împărţite în mod egal la trei persoane: A, B şi o a treia persoană, C. Aceasta din urmă oferă 5 lei, în semn de mulţumire, lui A şi B. Cum trebuie repartizaţi cei cinci lei? Părerile sunt împărţite. A crede că i se cuvin 3 lei, deoarece a contribuit cu 3 pâini, iar lui B i

se cuvin numai 2 lei, deoarece a contribuit numai cu 2 pâini. *B* crede că i se cuvin 2,50 lei, tot atâta cât şi lui *A*, deoarece *C* nu a plătit pâinea, ci pur şi simplu a mulţumit în mod egal lui *A* şi *B*. În sfârşit, un arbitru al situaţiei, să-i spunem *D*, consideră că lui *A* i se cuvin 4 lei, iar lui *B* numai 1 leu. Argumentul său este următorul: fiecare pâine a fost împărţită în trei bucăţi egale. Din cele 15 bucăţi, fiecare a mâncat câte cinci. Dar *A* a contribuit cu 9 bucăţi, din care 4 au fost dăruite lui *C*, iar *B* a contribuit cu 6 bucăţi, dintre care numai una a fost dăruită lui *C*. Deci din pâinea mâncată de *C* patru părţi proveneau de la *A* şi numai o parte de la *B*. Aşadar lui *B* i se cuvine o sumă de patru ori mai mică decât suma care i se cuvine lui A.

Cine are dreptate? Creangă pare a fi de partea lui *D* şi tot aşa manualul de matematică pentru clasa a patra. Însă aici nu este vorba de o greşeală de raţionament sau de calcul comisă de cineva. Diferenţa de rezultat în evaluările celor trei este datorată unei deosebiri de punct de vedere. Problema nu mai este de natură matematică, ci moral-filozofică.

Unde se ascunde infinitul?

La un concurs de detectare a elevilor talentaţi la matematică, la clasa a patra primară, s-a propus următoarea problemă. Un tren şi o rândunică pleacă simultan din Bucureşti, spre Ploieşti. Trenul are o viteză de 60 km/oră iar rândunica 90 km/oră. Firește, rândunica ajunge la Ploieşti înaintea trenului. Imediat se întoarce până întâlneşte trenul şi iar schimbă direcţia spre Ploieşti, repetând mereu acest itinerar. Ştiind că trenul şi rândunica ajung la un anumit moment împreună la Ploieşti, să se determine distanţa totală parcursă de rândunică.

În intenţia propunătorilor, problema face parte dintre acele păcăleli în care unele date sunt introduse pentru distragerea atenţiei, răspunsul putând fi obţinut aproape fără nici un efort. În cazul de faţă, necontenitul du-te-vino al rândunicii nu este luat în considerare. Distanţa totală parcursă de rândunică este de 90 km, deoarece, ajungând la

Ploieşti odată cu trenul, sosirea comună nu poate avea loc decât după o oră (distanţa de la Bucureşti la Ploieşti fiind de 60 km). Însă enunţul problemei conţine o presupoziţie peste care nu se poate trece uşor; este vorba de acceptarea tacită a existenţei unui moment în care trenul şi rândunica ajung împreună la Ploieşti. La a n-a întâlnire cu trenul, rândunica se întoarce spre Ploieşti, unde ajunge, firește, înaintea trenului, deoarece are o viteză superioară trenului. Rezultă că urmează inevitabil a $n + 1$-a întâlnire a rândunicii cu trenul. Dar faptul că procesul are o infinitate de etape nu înseamnă neapărat că durata sa este infinită. Notând cu t durata care se scurge între a n-a şi a $n + 1$-a întâlnire, durata totală a procesului va fi suma t a seriei de termen general t_n. Nu intrăm în detalii, dar analogia cu situaţia din paradoxul lui Zenon, privind pe Ahile şi broasca ţestoasă, este evidentă. În cazul nostru, trenul este pe post de Ahile, iar rândunica preia rolul broaştei ţestoase.

Poate fi 2 egal 4?

Din $cos^2\ x = 1 - sin\ x^2$ se obţine, prin ridicare la puterea de exponent 3/2,

$(cos^2\ x)^{3/2} = (1 - sin^2 x)^{3/2}$

deci:

$cos^3 x + 3 = (1 - sin^2\ x)^{3/2} + 3$

Prin ridicare la pătrat, se obţine :

$(cos^3\ x + 3)^2 = [(1 - sin^{\ 2}\ x)^{3/2} + 3]^2$

Pentru $x = \pi/2$ radiani, obţinem $cos\ x = 0$ şi $sin\ x = 1$, deci $3^2 = 3^2$, aşa cum era de aşteptat. Însă pentru $x = \pi$ radiani, avem $cos\ x = -1$ şi $sin\ x = 0$, deci $2^2 = 4^2$, de unde rezultă $2 = 4$. Unde este greşeala?

„Orice triunghi este echilateral“

Fie un triunghi ABC, fie b latura AC şi c latura AB. Să prelungim latura BA cu segmentul AD de lungime b. Să prelungim de asemenea latura CA cu segmentul AE de lungime c. Aplicând teorema sinusului

în triunghiurile *BCE* şi *BCD*, avem sin $(B + A/2) = / (b+c)/a)$ *sin* $(A/2)$ şi *sin* $(C + A/2) = ((b + c/a))$ *sin* $(A/2)$, de unde *sin* $(B + A/2) =$ *sin* $(C + A/2)$, deci $B = C$. În mod similar se arată că $C = A$. După cum se vede, cele trei laturi ale triunghiului *ABC* au fost notate chiar cu *a*, *b*, *c*, iar cele trei unghiuri au fost notate chiar cu *A*, *B*, *C*. Din egalitatea unghiurilor rezultă egalitatea laturilor, deci triunghiul *ABC*, iniţial arbitrar, se dovedeşte a fi echilateral. Aşa să fie oare?

„Orice triunghi este dreptunghic“

În triunhiul arbitrar *ABC* cu înălţimea *CD* egală cu *h* şi în care punem $p = AD$ şi $q = BD$, avem $sin(A + B) = sinA\ cosB + sinB\ cosA$, deci $sin(A + B) = (h/b)(q/a) + (p/b)(h/a) = hc/ab = h\ sinC/(2r\ sinA\ cosB)$. Însă $h = 2r\ sinA\ sinB$, $sinA\ h/b$, $b = 2r\ sinB$. Avem $sin\ (A + B) = sinC$, $A + B + C = \pi/2$, deci triunghiul *ABC* este dreptunghic în *C*. Aşa să fie oare?

O pereche de drepte este... o hiperbolă?

Fie dreptele $x = 4$ şi $y = 8$, pe care le mai putem scrie $x - 4 = 0$, $y - 8 = 0$. Ecuaţia comună a celor două drepte este $(x - 4)(y - 8) = 0$, adică $xy - 4y - 8x + 32 = 0$. Însă, prin multiplicare membru cu membru, primele două ecuaţii conduc la hiperbola echilaterală $xy = 32$. Operându-se această înlocuire în ecuaţia anterioară, obţinem: $4y - 8x + 32 = 0$, deci $y = -2x + 16$. Pe de altă parte, împărţind membru cu membru primele două ecuaţii, se obţine dreapta $y = 2x$. Ce s-a întâmplat de fapt?

Inducţie abuzivă

Exemplul care urmează aparţine lui Kummer, algebrist căruia îi datorăm noţiunea matematică de ideal. 60 este divizibil prin 2; acelaşi număr 60 este divizibil prin 3, prin 4, prin 5, prin 6; deci 60 este divizibil... prin orice număr natural. Putem chiar face proba, luând $n = 12$.

Un exemplu similar se referă la numerele de forma p = 1 + puterea de exponent 2^n a lui 2. Pentru $n = 0$ obţinem $p = 3$, pentru $n = 1$, obţinem $p = 5$; pentru n = 2, obţinem $p = 17$ iar pentru $n = 3$ obţinem $p = 257$. De fiecare dată, p a fost un număr prim. Pentru $n = 4$ obţinem $p = 65537$, de asemenea prim. Însă pentru n = 5 se obţine $p = 1 + 2$ la puterea 32, despre care Euler a arătat că este divizibil prin 641.

sin 2x = 2 sinx?

Din bine cunoscuta relaţie $\lim(\sin x)/x = 1$ pentru $x \to 0$ rezultă $\lim(\sin 2x)/x = \lim(2 \sin x)/x = 2$ pentru $x \to 0$ (deoarece $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$), deci $\sin 2x = 2 \sin x$.

Din bine cunoscuta relaţie $\lim(\sin x)/x = 1$ pentru $x \to 0$ rezultă $\lim(\sin 2x)/x = \lim(2 \sin x)/x = 2$ pentru $x \to 0$ (deoarece sin2x = 2 sin x cos x), deci sin 2x = 2 sinx. Numai că... din $\lim f(x)/h(x) = \lim g(x)/h(x)$ pentru $x \to a$ nu se poate deduce că f(x) = g(x). De altfel, este suficient să luăm $x = \pi/4$, pentru a constata falsitatea identităţii din titlul acestui paragraf.

2 = 3 =... n?

Să considerăm funcţia $y = x^n$. Formând expresia din definiţia derivatei într-un punct a, obţinem:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

Trecând la limită pentru $x \to a$, obţinem:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

Însă avem $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$, $(x^3 - 1)/(x - 1) = x^2 + x + 1$ şi, în general, $(x^n - 1)/(x - 1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$, unde n este un număr natural. Un elev a încercat să vadă ce se întâmplă cu ultimele

egalităţi atunci când x = 1. Constatând că de fiecare dată primul membru capătă forma 0/0, a aplicat principiul: *Două cantităţi egale cu a treia sunt egale între ele* şi a dedus că expresiile din membrul al doilea sunt la rândul lor egale între ele, pentru x = 1, obţinând astfel 2 = 3 =... = *n*. Însă 0/0 nu este un număr, iar funcţia $(x^2 - 1)(x - 1)$ nu este aceeaşi cu funcţia $x + 1$, deoarece, de exemplu, prima funcţie nu are sens pentru $x = 1$, în timp ce a doua are sens şi este egală cu 2. Situaţii de acest tip au fost detectate şi discutate încă în secolul XVIII-lea, de filozoful Berkeley.

Numărul *e* între 1 şi ∞

Se ştie că numărul e se obţine ca:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Un elev a demonstrat în modul următor că $e = 1$: Trecem la limită în expresia $1 + 1/n$, care constituie baza puterii în discuţie, şi obţinem ca limită pe 1. Trecem apoi la limită expresia 1^n pentru $n \to \infty$. Însă $1^n = 1$, deci limita lui 1^n este egală 1. Un alt elev i-a replicat în modul următor: baza $1 + 1/n$ este egală cu $(n+1)/n$, deci este strict mai mare decât 1. Însă se ştie că o limită de forma:

$$\lim_{n\to\infty} a^n$$

unde a este supraunitar, este egală cu $+\infty$; deci limita căutată este $+\infty$.

Ambii elevi greşesc, deoarece acelaşi *n* figurează atât la exponent cât şi la numitorul din expresia bazei. Nu putem ţine fix pe unul din aceşti n, în timp ce studiem limita expresiei conţinând pe celălalt *n*. Procesul de trecere la limită angajează concomitent toate componentele funcţiei.

O aparentă anomalie privind lungimea curbelor

Să considerăm un triunghi *ABC*, unde *A* are coordonatele (0, 0), *B* are coordonatele(1,0), iar *C* are coordonatele (1/2, 1). Este evident

vorba de un triunghi isoscel. Linia poligonală *ACB* este imaginea unei curbe C_1 reprezentate parametric prin $x = t$, $y = f(t)$, t cuprins între 0 şi 1, unde $f_1(t)$ este ordonata acelui punct al liniei ACB a cărui abcisă este t. Funcţia f_1 este, evident, continuă. Fie acum o curbă C_2 având ca imagine linia poligonală *ADEFB*, unde *D* are coordonatele (1/4, 1/2), E are coordonatele (1/2, 0), iar F are coordonatele (3/4, 1/2). Curba C_2 este reprezentată parametric prin $x = t$, $y = f_2(t)$, t cuprins între 0 şi 1, iar $f_2 t$ este ordonată acelui punct de pe linia poligonală, *ADEFB*, a cărui abscisă este t. Evident, f_2 este continuă, iar lungimea lui C_2 este egală cu lungimea lui C_n (datorită faptului că DE este egal cu *CF,* iar segmentul *EF* este egal cu *DC*). Continuând în acest fel, vom defini o curbă C_n pe a cărei imagine punctul cel mai de sus va avea ordonata $1/2^n$ iar lungimea lui C_n va fi egală cu lungimea curbelor C_p cu p inferior lui n. Evident, lungimea comună a curbelor C_n (n număr arbitrar) este superioară lui 1, deoarece în orice triunghi lungimea unei laturi este depăşită de suma lungimilor celorlalte două laturi.

Notând cu *C* curba dată parametric de $x = t$, $y = 0$, t cuprins între 0 şi 1, constatăm că imaginea lui *C* este segmentul de dreaptă *AB*. Putem introduce o distanţă între *C* şi C_n, măsurată prin diferenţa maximă între ordonatele a două puncte *A* şi A_n situate respectiv pe *C* şi C_n şi având aceeaşi abscisă. Este uşor de văzut că distanţa dintre *C* şi C_n este egală cu $1/2^n$. Rezultă de aici că şirul (C_n) tinde către curba *C*, în sensul că distanţa dintre C_n şi *C* tinde la zero când n tinde la infinit: (Se verifică uşor că distanţa introdusă are proprietăţile cerute unei distanţe: se anulează numai pentru curbe care coincid, este simetrică, nenegativă şi satisface inegalitatea triunghiului).

Ne-am aştepta acum ca, din faptul că şirul (C_n) tinde la *C*, să rezulte că şirul format cu lungimile curbelor C_n să tindă la lungimea lui *C*. Însă aceasta nu se întâmplă; lungimile curbelor C_n formează un şir staţionar în care valoarea comună a termenilor este superioară lui 1, în timp ce lungimea lui *C* este lungimea segmentului *AB*, deci egală cu 1.

De unde provine această înşelare a aşteptării noastre? Din faptul că, obişnuiţi ca funcţiile cu care lucrăm să fie continue şi obişnuiţi cu faptul că la modificări mici ale unei curbe corespund de obicei modificări mici ale lungimii ei, ne aşteptăm ca lungimea unei curbe să fie o funcţie continuă de curbă. Totuşi, aceasta nu se întâmplă. După cum a arătat încă la începutul secolului al XX-lea Maurice Fréchet, lungimea unei curbe este o funcţie inferior – semicontinuă, deci posedă, în general, numai jumătate din proprietatea de continuitate. În ce constă proprietatea de semicontinuitate? O vom defini aici în cazul particular al unei funcţii reale *f* de variabilă reală, Fie f:(a, b) → R.

Vom spune că *f* este inferior semicontinuă în punctul $x_0 \in (a, b)$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât de îndată de $|x-x_0| < \delta$ avem $f(x) - f(x_o) > -\varepsilon$. Vom spune că f este superior semicontinuă în x_o dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât, de îndată ce $|x-x_o| < \varepsilon$, avem $f(x) - f(x_{o)} < \varepsilon$. Este uşor de văzut că o funcţie este continuă în x_o dacă şi numai dacă este este atât inferior semicontinuă cât şi superior semicontinuă în x_o.

Pentru descreţirea frunţilor

Operaţiile cu exponenţi sunt bogate în capcane. Unele simplificări abuzive, ridicole, care sfidează cele mai elementare reguli de igienă matematică rămân totuşi fără efect asupra rezultatului. În revista „Scripta Mathematica“ (vol. 20, 1954, p. 50) se menţionează următoarea situaţie:

$$\frac{2^2+3^2}{\left(\frac{13}{5}\right)^2} = \frac{2+3}{\frac{13}{5}}$$

şi, în general,

$$\frac{a^2+b^2}{\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2} = \frac{a+b}{\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)}$$

În aceeași ordine de idei avem:

$$\frac{3^4+25^4+38^4}{7^4+20^4+39^4}=\frac{3+25+38}{7+20+39} \text{ și}$$

Iată acum și „simplificări parțiale“ ale exponenților:

$$\frac{49^5+176^5+107^5}{39^5+92^3+100^5}=\frac{49+175+107}{39+92+100}$$

$$\frac{3^6+19^6+22^6}{10^6+15^6+23^6}=\frac{3^2+19^2+22^2}{10^2+15^2+23^2} \text{ sau } \frac{3^4+5^4+8^4}{7^4+7^4}=\frac{3^2+5^2+8^2}{7^2+7^2}$$

În aceeași ordine de idei avem:

$$\frac{27^4+2^4+4^4+21^4}{28^4+1^4+9^4+18^4}=\frac{27^2+2^2+4^2+21^2}{28^2+1^2+9^2+18^2}=\frac{27\times2\times4\times21}{28\times1\times9\times18}$$

unde, după „simplificarea“ cu 2 a exponenților, s-a înlocuit pur și simplu suma prin produs; Și pentru ca totul să devină o adevărată orgie, să înlocuim, în ultima expresie, primul x de la numărător și de la numitor prin + iar următoarele x prin –. Obținem expresia, egală ca valoare , (27 + 2- 4 – 21)/(28 + 1 – 9 – 18).

Alteori, simpla scădere a unității din fiecare exponent rămâne fără efect asupra rezultatului:

$$\frac{2^3+3^3+10^3+11^3}{1^3+5^3+8^3+12^3}=\frac{2^2+3^2+10^2+11^2}{1^2+5^2+8^2+12^2}=\frac{2+3+10+11}{1+5+8+12}$$

Prima relație care urmează este un caz particular al celei de a doua:

$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}, \frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(ab)}$$

Despre acestea și altele asemănătoare se discută în Scripta Mathematica, vol. 6, p. 180; vo.. 19, 1953, p. 282. A se vedea, de asemenea, Jerome S. Mayer, *Fun with Mathematics* (Fawcett Publishing Co., New York, 1967, p. 59) și M. Kraitchik, *Mathematical Recreations* (Dover Publications, New York, 1953).

CAPITOLUL IX
GRAMATICA JOCULUI DE TENIS

La sfârşitul anilor '70 ai secolului trecut, am propus Gabrielei Sfarti, ca temă a lucrării sale de diplomă, să studieze gramatica jocului de tenis, după modelul gramaticii narative din capitolul al cincilea al cărţii pe care am coordonat-o, în 1978, la Editura Klincksieck, Paris, *La semiotique formelle du folklore*. Rezultatul acestei investigaţii a constituit substanţa articolului *The tennis game as a language*, publicat de Gabriela Sfarti în „Revue Roumaine de Linguistique", vol.25, 1980, no.3, p. 243-260.

După el ne ghidăm în cele ce urmează.

Competenţă şi performanţă în tenis

Distincţia competenţă-performanţă trebuie înţeleasă aici nu în sensul obişnuit al acestor cuvinte, ci în accepţiunea pe care a adus-o în centrul atenţiei Noam Chomsky în anii '50 ai secolului trecut. În orice activitate umană putem distinge două planuri: unul, al tipului de competenţă care-i stă la bază, altul, al realizării ei efective. Tipul de competenţă este dat de anumite reguli care trebuie urmate, reguli care vizează anumite mecanisme cerebrale, ansamblul acestor reguli definind, pentru Chomsky, o gramatică a activităţii respective. Spre deosebire de gramatica tradiţională, de natură descriptivă, gramatica lui Chomsky este de natură generativă, ea generează toate variantele posibile ale activităţii considerate, indiferent de posibilitatea lor de realizare efectivă. De exemplu, dacă este vorba de jocul de tenis, gramatica sa va genera toate desfăşurările posibile ale unei partide de tenis, indiferent de durata pe care ea ar putea-o avea, deci indiferent de rezistenţa fizică şi psihică a jucătorilor. Să nu uităm că jocul de tenis nu are o durată prestabilită. Dacă însă reţinem, din toate partidele posibile, numai pe acelea efectiv

realizabile, în raport cu parametrii psiho-somatici şi de altă natură, atunci ne situăm în planul performanţei jocului de tenis. Cuvântul *performanţă* nu are deci aici conotaţia superlativă obişnuită, ci numai pe aceea de *realizare efectivă*.

Ocupându-ne de gramatica jocului de tenis, este deci clar că avem în vedere exclusiv tipul de competenţă care se află la baza acestui joc; vom ignora diferitele limitări impuse de circumstanţele de realizare. Una dintre consecinţe va fi faptul că jocul de tenis va apărea ca o activitate potenţial infinită.

Alfabetul tenisului

Ideea de gramatică se asociază în mod natural cu ideea de limbaj, care, la rândul ei, se asociază cu ideea de cuvânt pe un anumit alfabet. Limbajul, indiferent de natura sa, se prezintă ca o colecţie de secvenţe finite formate cu elementele unui alfabet finit. Să ne amintim că secvenţialitatea este trăsătura specifică a structurilor controlate cu precădere de emisfera cerebrală stângă, motiv pentru care limbajul şi logica sunt privilegiul acestei emisfere cerebrale. Să încercăm deci să identificăm un posibil alfabet al jocului de tenis. Nu este vorba de noţiunile de bază ale tenisului, ci de anumite acţiuni sau evenimente elementare, cu ajutorul cărora putem reprezenta orice evoluţie posibilă într-un joc de tenis, aşa cum, cu ajutorul literelor alfabetului latin, putem exprima în scris orice enunţ în limba română. Iată un posibil alfabet al jocului de tenis: a = serviciu, b = trecerea mingii deasupra fileului; c = mingea este stopată de fileu; d = serviciu corect; e = serviciu greşit; f = mingea servită trece în terenul advers, după ce a atins fileul (se ştie că în aceste condiţii serviciul trebuie repetat); g = retur; h = minge corectă (mingea cade în terenul advers); i = minge greşită (mingea cade în afara terenului advers); j = ratarea returului (mingea nu este interceptată la timp de unul dintre jucători); k = la momentul de impact, mingea este lovită de două ori de către unul dintre jucători).

La acest alfabet de unsprezece acţiuni (evenimente) elementare, câteva comentarii sunt necesare. Caracterul elementar, primitiv al

acestor 11 acţiuni (evenimente) nu se referă la faptul că ele nu ar putea fi descompuse la rândul lor în acţiuni (evenimente) mai simple, ci este rezultatul unei convenţii motivate prin comoditatea ei. De exemplu, acţiunea *a* (serviciu) ar putea fi descompusă în evenimente mai simple, cum ar fi ocuparea unei poziţii convenabile, mişcarea adecvată a picioarelor, aruncarea în sus a mingii, lovirea ei etc., tot aşa cum literele de tipar ale alfabetului latin ar putea fi descompuse în elemente mai simple, cum ar fi anumite segmente de dreaptă orizontale, verticale sau oblice, anumite curbe etc. Nu este deci vorba de o ireductibilitate propriu-zisă, ci de o alegere comodă în raport cu ceea ce ne propunem. Un alfabet trebuie să includă suficiente elemente pentru a face faţă varietăţii de structuri secvenţiale pe care urmează să le generăm, dar numărul lor nu trebuie să fie prea mare, pentru a nu complica inutil gramatica obţinută.

Limbajul infinit al jocului de tenis

Acest limbaj urmează să cuprindă totalitatea acelor cuvinte pe alfabetul considerat care descriu evoluţiile posibile într-un joc de tenis. Deoarece tenisul este un joc necooperativ, de sumă nulă (orice câștig al unui jucător este o pierdere corespunzătoare pentru jucătorul advers și orice pierdere pentru unul este un câștig pentru celălalt), vom considera separat limbajul M al evoluţiilor care duc la câștig pentru jucătorul de la serviciu și limbajul N al evoluţiilor câștigătoare pentru jucătorul care primește serviciul. Reuniunea lor L va fi limbajul tenisului.

Să notăm cu *x* unul dintre următoarele patru cuvinte: *gbi, gc*, j și *k*. Fie n un număr par strict pozitiv. Fie u numărul de servicii consecutive care preced primul serviciu corect sau greșit și în care mingea trece în terenul advers după ce a atins fileul; fie *v* numărul de servicii consecutive care preced cel de al doilea serviciu (corect sau greșit) în care mingea trece în terenul advers după ce a atins fileul. Fie *t* un parametru care ia valorile 1 (pentru mingi care ating solul) și 0 (pentru mingi care nu ating solul).

Câştigarea unui punct de către jucătorul care serveşte poate fi obţinută în trei moduri:

1) $(af)^u\ abd(gbh^t)^n\ x$ (după u servicii af care sunt repetate deoarece mingea trece fileul atingându-l, are loc un serviciu corect exprimat prin abd, după care urmează fie n schimburi corecte de mingi care ating solul advers, deci de forma gbh (adică $t = 1$), fie n schimburi de voleuri (mingi care nu ating solul: gb, deci $t = 0$) şi, în sfârşit, una dintre cele patru forme ale lui x: gbi (jucătorul de la primire trimite mingea în afara terenului), gc (mingea sa este oprită de fileu), j (mingea nu este interceptată de către jucătorul de la primire) sau k (mingea este lovită de două ori de către jucătorul de la primire) (gc).

2) $(af)^u ac(af)^v\ abd(gbh^t)^n x$; 3) $(af)^u\ abe(af)^v abd(gbh)^n x$ (lăsăm cititorului să interpreteze, după modelul lui 1, posibilităţile 2 şi 3). Deoarece fiecare dintre cele trei tipuri comportă patru variante de evoluţii avantajoase pentru jucătorul de la serviciu (în funcţie de expresia lui x), rezultă că limbajul M include 12 tipuri de cuvinte, fiecare tip incluzând, la rândul său, o infinitate de cuvinte individuale, ca urmare a prezenţei parametrilor u, v si n, care iau, fiecare în parte, o infinitate de valori (parametrul t ia numai valorile 0 si 1).

Din analiza de mai sus se înţelege clar unde se află sursele infinităţii limbajului M. O primă sursă este posibilitatea de principiu că următoarea situaţie să se repete indefinit: mingea servită trece în terenul advers, deşi ea atinge în prealabil fileul (de aici rezultă valori posibile oricât de mari pentru u şi v). O a doua sursă este posibilitatea unui schimb oricât de lung de mingi corecte între cei doi jucători (deci valori oricât de mari pentru n).

Trecând acum la evoluţiile posibile de câştig pentru jucătorul care primeşte serviciul, vom detecta următoarele şapte tipuri posibile (convenţiile pentru x, u, v şi t sunt aceleaşi ca în cazul anterior; de această dată însă parametrul n nu mai ia valori pare, ci valori impare):

1)$(af)^u ac(af)^v ac$; 2) $(af)^u abe(af)^v abe$; 3) $(af)^u ac(af)^v abe$; 4) $(af)^u abe(af)^v ac$;
5) $(af)^u abe(af)^v abd(gbh^t)\ x$; 6) $(af)^u ac(af)^v abd(gbh^t)\ x$; 7) $(af)^u abd(bh^t)\ x$.

Rezultă că limbajul N include 16 tipuri de cuvinte (patru tipuri care

nu conţin pe x şi 12 tipuri care provin din cele trei tipuri care-l conţin pe x), dar fiecare dintre cele 16 tipuri conţine o infinitate de cuvinte individuale, ca urmare a prezentei parametrilor u, v şi n, care iau, fiecare în parte, o infinitate de valori.

Limbajul L al tenisului este deci reuniunea limbajelor M şi N. Este poate interesant de observat în ce raport se află limbajele M şi N. Constatăm că N se obţine din M prin adăugarea cuvintelor de tipurile 1, 2, 3 si 4 corespunzătoare primelor patru evoluţii posibile de câştig pentru jucătorul de la primire, cu condiţia de a face abstracţie de faptul că în cazul lui M parametrul n ia valori pare, în timp ce în cazul lui N parametrul n ia valori impare. Sfarti comentează acest fapt în felul următor: dacă jucătorul de la serviciu nu comite nici o dublă eroare, atunci şansele de câştig sunt aproximativ egale pentru cei doi jucători. Pe de altă parte, cuvintele corespunzătoare lui $n = 0$ aparţin lui M (deoarece 0 este număr par), ceea ce înseamnă că un bun serviciu poate fi decisiv.

Gramatici şi automate ale jocului de tenis

O gramatică generativă este alcatuită dintr-un alfabet terminal, care în cazul de faţă va fi $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$, un alfabet auxiliar, care aici va fi $\{S, X, Y, Z, W\}$, unde S este simbolul de start, şi o mulţime finită R de reguli de forma $p \rightarrow q$, unde p şi q sunt cuvinte pe alfabetul total (reuniune a alfabetului terminal cu cel auxiliar), p neavând voie să fie cuvântul nul. Semnificaţia regulii $p \rightarrow q$ este: p se înlocuieşte cu q. Plecâdu-se de la simbolul de start S şi aplicâdu-se succesiv diferite reguli din R, se obţin diferite cuvinte pe alfabetul terminal; aceste cuvinte formează limbajul generat de gramatica gencrativă considerată. Pentru generarea limbajului M, se poate arăta că următoarele reguli conduc la rezultat: S → afS, S→acZ, S→abeZ, S→abdY, Z→afZ, Z→abdY, Y→gbhX, Y→gbX, X→gbhgbhX, X→gbgbX, X→gbgbhX, X→gbhgbX, X→gbhW, X→gbW, W→gbi, W→gc, W→ j, W→k. Este ceea ce se numeşte o gramatică liniară la dreapta. În mod similar, putem genera pe N folosind o gramatică având

același alfabet terminal ca mai sus, dar alt alfabet auxiliar: {*S*, *X*, *Y*, *Z*}, unde *S* este simbolul de start. Vom folosi următoarele reguli de generare: S→abcZ, S→abdY, Z→afZ,

Z→*ac*, Z→abe, Z→abdY, Y→gbhX, S→afS, S→acZ, Y→gbX, X→gbgbX,

X→gbhgbhX, X→gbhgbX, X→gbgbhX, X→gbi, X→gc, X→j, X→k.

Gramaticile astfel obținute pentru limbajele *M* si *N* intră în clasa limbajelor independente de context, caracterizate prin proprietatea de a putea fi generate cu reguli *u*→*v* în care u se reduce la un element din alfabetul auxiliar, iar *v* este de lungime nenulă. Se poate însă arăta că limbajele *M* și *N* sunt regulate; este vorba de un caz particular al gramaticilor independente de context, în care regulile sunt de forma *A*→*Ba*, *C*→*b*, unde *a* și *b* sunt elemente ale alfabetului terminal, iar *A*, *B* și *C* sunt elemente ale alfabetului auxiliar. În ultimă instanță, regularitatea limbajelor *M* și *N* rezultă din faptul că în expresia cuvintelor din cele două limbaje nu apare nici o legătură între exponenții *u*, *v* și *n*, fiecare dintre ei luând valori care nu depind de valorile luate de ceilalți doi exponenți.

Regularitatea limbajului *L*, reuniune a limbajelor *M* și *N*, rezultă acum din proprietatea mai generală care afirmă că reuniunea a două limbaje regulate este un limbaj regulat; cititorul poate verifica aceasta ca un simplu exercițiu.

Elementele alfabetului auxiliar au o semnificație categorială (în contrast cu cele ale alfabetului terminal, care au o semnificație lexicală, asociată, în cazul nostru, cu diferitele tipuri de acțiuni (evenimente) elementare în jocul de tenis. Urmărind comportamentul elementelor din alfabetul auxiliar în procesul generativ, desprindem pentru ele următoarele semnificații categoriale: *S* simbolizează schimbul de mingi, începând cu serviciul și încheindu-se cu obținerea unui punct de către unul dintre jucători. Simbolul *Z* din regulile cu autoincluziune (adică în care *Z* apare atât la stânga cât și la dreapta), reprezintă o infinitate de cuvinte, anume cele de forma af repetat de *v* ori urmat de

ac, *af* repetat de v ori urmat de abe sau af repetat de v ori urmat de abd urmat de n apariţii consecutive ale lui *gbh* (unde *t* ia valorile 0 şi 1) urmat de *x* (care poate fi gbi, gc, j sau k); putem spune că Z reprezintă acea parte a jocului care începe cu serviciul celei de a doua mingi şi se sfârşeşte cu câştigul punctului. Simbolul *Y* reprezintă cuvintele de forma $(gbh^t)^n x$, unde *n* este un număr natural, *t* este egal cu 0 sau 1 iar *x* are una dintre cele patru forme deja indicate. *Y* corespunde acelei părţi a jocului care începe cu primul retur şi se încheie cu câştigarea punctului.

Simbolul *X* corespunde evoluţiei mingii de la primul serviciu până la prima greşeală comisă. Simbolul *W* exprimă sfârşitul unui schimb de mingi, sub una dintre formele lui *x*: *gbi*, *gc*, *j* sau *k*.

Observăm mai sus că, formal, o mare parte din limbajul *N* este limbajul *M*. Dar, de fapt, *M* şi *N* nu au nici un cuvânt comun, deoarece în cuvintele din *M* exponentul n este par, în timp ce, în cuvintele din *N*, *n* este impar.

În articolul menţionat al Gabrielei Sfarti, analiza jocului de tenis este aprofundată prin luarea în considerare a locului din care mingea este lovită de unul dintre jucători şi a locului din care mingea este returnată de celălalt jucător. Aceasta înseamnă o complicare a alfabetului terminal, deoarece trebuie împărţit terenul în careuri codificate în mod adecvat. Se arată că şi în aceste condiţii tenisul rămâne un limbaj regulat, gramatica sa se complică în detalii, dar nu şi în structură. Sunt puse în mişcare noi mijloace, de tipul automatelor finite nondeterministe, al maşinilor secvenţiale generalizate şi al automatelor Mealy. Întreaga dinamică a jocului de tenis, incluzând situaţiile de *deuce*, *advantage*, *tie break*, evoluţia scorului etc. Pe această bază, urmărindu-se dinamica jocului de tenis, se definesc în mod riguros noţiuni ca *joc defensiv şi joc ofensiv*. Este confirmată bine cunoscuta observaţie conform căreia poziţiile iniţiale ale jucătorilor şi loviturile de începere sunt factori determinanţi pentru evoluţia ulterioară a jocului.

În întreaga analiză s-a folosit, în ceea ce priveşte definirea şi regulamentul jocului de tenis, cartea lui Eugen Cristea şi Ilie Năstase *Manual de tenis*, Editura Sport-Turism, Bucuresti, 1975.

CHAPTER X
(Jouko Seppänen). GAME, PLAY, AND THEIR HISTORY
(Key words and authors)

Concepts

Concepts: game, play, player, playing, game object; play music, play a role, theatre; hand play, foot play; horse play, driving play, vehicle; sports sports game, game sports, game object; parlour game, entertainment game, game company; war, war game, game war, war play, play war; game strate gy, tactics; spirit of the game, game philosophy, game theory.

Games of chance: luck, game of chance, game luck, chance; lot, gamble, luck lot, lot of luck; dice play, lot, dice, astragalos, scoret; poker, poker face, roulette, Russian roulette; game of chance, gambling, compulsive gambling.

Game object: game tool, ball, dice, button, card; ball game, ball, football, handball, basketball, target, basket; playing instrument, music, musician.

Board games: board game, button, oak chess, checkers, go; transfer, beginning, gambit; turn, pulling, countermove; skill game, game skill, collision, blunder.

Parlour games: card game, colour, black and white; country, hearts, pot, cross and screen; asset, trump card. joker, ace; puzzle, jigsaw puzzle.

Match – competition: competition, opponent, coperation; game partner, play mate; allying, alliance, clique, plot, conspiracy, revolt, coup; superi-ority, advantage, home ground, handicp, perseverance.

Score and result: situation, progress of the game, cuff; the leading position, will reach, to lose, backlash; one narrows, it passes, to stay, to fall; opportunity, threat situation, situation control, ball lost; drifting, breakthrough, lurk, wait; surround, withdraw, concentrate, feint, surprise delay; deliver, interrupt, terminate, scope; result, victory, defeat, draw, drop, drop, account;.

Rules of the game: rule, offence, forgive, revenge, compensate; attack, defence, reject, parry, circulate; playing time, time game, time

out, more time; post-mortem, make excuses, challenge; nerve, time limit, edge, spoke.

Spirit of game: spirit, play game, true game, straightforward game; open, straightforward, honest game, fair play; team-work, solo, deceit, decep- tion, harmony game; clean game, dirty game, raw game, ugly game; jamming, violence, forces; vexation, milking, taming, withdrawal; skulduggery, fool game, double-faced game, plotting; game extract, game style.

Game participants: patience, solitaire, partner, n-person game; role game, play, presentation, team game, referee.

Game mistake: mistake, game mistake, tackle, offside; whistle, broken, break, the break stop; punishment, penalty, free kick; battle, struggle, tournament, cup.

Game order: practice, limbering up, training, cutting short; lot, time, turn, circuit; playing season, opening, closing ceremony.

Literature.

Conceptual periodization

Concepts

Prehistory – origins of games: game, Engl. play, Gr. gamos, Lat. ludus, locus, Germ. spiel, Sw. spela, Fr. jeu, Sp. jugar, pelear, Slav. plesati.

Natural history: prehistory of life, played, a game, a war; life game, black grouse game, display game, love game; struggle for life, eye game, game eye.

Cultural history: belief, astragalos, religion, fate, lot, destiny; trade, buying, selling, haggling; ; power game, administration, politics; right, wrong, crime, law, legislation, rules; war, warfare, arms, armies;

Antiquity, Greece, Hellenism, Rome: philosophy, politics; art of war, war doctrine, tactics, strategy, plotted, stratagem, strategy; game of chance; art, wall painting, game as subject of art.

Middle Ages: god, belief, praying, theology, inquisition.

Renaissance: administration, philosophy, chess as theme of painting.

New Time: philsophy, diplomacy, diplomatics; gambling, roulette, mathematics of games of chance, probability.

Enlightenment: society, politics, political science, political economics; class society, philosophy of revolution, revolution; crime, penal code, philosophy of jurisprudence.

Newest Time: biology, theory of evolution, struggle for life; variation, natural selection, adaptation, evolution, , evolutionism; class war, theory of class war, theory of revolution.

Modern Time: behaviour, behaviourism, behavioural sciences; mathematical game theory, theory of board games; theory of chess, general games theory (1944); operational research (1944), management, management science.

Computer games: game machine, video game, computer game.

General game theory: disciplinary, interdisciplinary, multidisciplinary study of games.

Literature

Prehistory – natural and cultural history

Concepts: nature, man, culture.

Prehistory, natural life, survival game: live, game of life, struggle for life, luck, fate, destiny; survival in nature, game with nature, nourishment, predator, prey, catch game, eat, become eaten; procreation, black grouse game, display; ; heat, mate, copulate; marriage, Gr. gamos, husband, game- te, wife; will, disagreement, quarrel, fight, battle, resistance; power, power game, supremacy, suppression; oppose, resist, give up, humble, consent, gives in obey; fall in the field, be in nails, squeak, humiliate, pardon; revolt, conspiracy, coup, revolution;

Literature.

Concepts, human being, culture; Prehistory, nature, man, family, work, entertainment; Lat. homo ludens, playful human; community life, group, member, role; cooperation, competition, life game; game played, toy, doll, care; match, competition, race, sports, skill;

Language, communication: language, discussion, debate, language game; dance, song, poem, play, music, theatre.

Religion, belief, destiny: charm, prayer, victim, present, taboo; god, cult, rite, religion; mantics, divination, lot, prediction, oracle.

Literary culture: sign, writing, ability to write; writing, reading, lit-

erature; right, way, rule, law, jurisprudence; exchange, trade, economics, economy; will, objective, means, politics, politology; work, tool, device, machine, technique, technology; instrument, play, player, music; skill, art, style; art philosophy, aesthetics, art theory, art studies;

Literature.

Ancient civilisations – art of warfare, Greek antiquity – military history

Concepts: fighting, war, warfare, art of warfare; arm, army.

Prehistory – fighting

Ancient civilisations: China – Sun Tzu (c. 500 eaa) – *Ping fa – Art of war*; India – go (c. 500 eaa); Persia – chess (. 500 eaa); Babylon – penal code – Hammurapi (1726-1686) – „eye for eye"; Egypt – game as the sub- ject of art – wall paintings.

Literature.

Concepts of Greek antiquity

Prehistory, ancient civilisations: religion, oracle institution, Delfoi, Pythia, mantics; threat, hathred, war, art of warfare.

Greek antiquity, military history, strategy: Thukydides (c. 450-395), Peloponnesian wars, military history, strategy, Gr. strategos, stratagem, game literature; Ksenofon (c. 430-354), Anabasis, war tactics.

Rome – tactics: Julius Caesar (102-44) – Gallian wars. Vegetius (the 300's) *De re militari* – tactics and strategy; Tacitus (c. 50-n. 120), games of chance.

Literature.

Renaissance – art and literature; new time, diplomacy, diplomatics

Concepts: art, painting, literature, history.

Prehistory, cave paintings; ancient civilisations, religion, art, literature; antiquity, history, philosophy, art; middle ages, art of warfare, Niccolo Machiavelli (1469-1572) – *On the art of war*; „the ends sanctifie the means".

Renaissance, humanism, natural philosophy: mundane art, national literature; Sofonisba Anguissola (1523-1625), *Chess players* painting.

New time – science

Enlightenment, philosophy of man: Friedrich Schiller (1759-1805), game instinct.

Newest time, game literature: Fjodor M. Dostojevski (1821-1881) – *The Gamblers*.

Modern time – game: Herman Hesse (1877-1962) – *Glasperlenspiel.*

Literature.

Concepts of diplomacy: messenger, envoy, deputy, delegation, legacy; ambassador, embassy, diplomacy; espionage, counterintelligence, inquiry; to pry, lurk, wait, follow, track, trace, snuff; hide, camouflage, mislead, cheat. Prehistory – messengers. Ancient civilizations, advisors, councellors. Greek antiquity – envoys. Middle ages – delegations. Renaissan ce – ambassadors, embassies. New time, diplomacy: Jean Mabillon (1632-1707) – *De re diplomatica*(1681). Gottfried Leibniz (1646-1716) – document doctrine of diplomacy – *Codex juris gentium diplomaticus* (1695)

Enlightenment, scholarly diplomatics: Christian Eckhard (1742) – diplo- matic school. Jean Dumont (1726) – diplomacy and international right.

Literature.

Enlightenment, politics, political science

Concepts: society, country, state, nation; politics, political science; political game, power game, alliance; plot, conspiracy, revolution; autocra cy, dictatorship; conformance, dissidence, guerilla, liberation, terrorism; democracy, independence, safety, neutrality, unalliance; media game, presidential game, election tactics.

Prehistory-shamanism-tribal society; ancient civilisations, divine kings, Pharaos, slave society; Greek antiquity – state philosophy; middle ages, emperor; renaisance, humanism, democracy; new time, liberalism, parlamentarism; enlightenment, revolutionism: Adam Ferguson (1723-1816), social collisions of interests. The newest time, socialism, revolutionary philosophy, Karl Marx (1818-1883), strategy of class struggle. Modern time, revolution theory: Vladimir Lenin (1870-1922),

theory and strategy of class war. War philosophy: Lazare Carnot (1753-1823), France's operation.

Literature.

History and philosophy of rights

Concepts; good, bad, correct, wrong; right, crookedness, sense of justice, conscience; good will, bad will, character; uprightness, fairness, offence of the right; morals, ethics; law, legislation, jurisprudence, right doctrine.

Prehistory, natural right, conscience

Ancient civilizations – divine mandate: orders, prohibitions, Hammurapi's law, revenge, lot; judiciary, judicial system, trial, cleric ovality.

Greece antiquity, civic rights philosophy: ethics, philosophy of life, virtues, goodness,truth and beauty.

Rome, Roman right: moral philosophy, laws of twelve tables, „decemviri" (450 eaa); Gaius (3rd c.), *Institutionum commentarii* (c. 160); casuistry, vulgar right oikeus; Codex Euricianus (c. 475), *Lex Romana Burgundionum* (c. 490); Justinianus (354-430), *Institutiones; Lex Romana Visigotho- rum* (506); *Corpus juris civilis* (533-42).

Middle Ages, theology, ecclesiastical right: sin, forgiveness, inquisition, confession; Renaisance, humanism, Mundane right. New time, legal science: object of legal protection, legal good, legal evil, legal source, legal basis, causa, legal practice, , law, placing, regulation, norm, jurisprudence, jurisdiction. Enlightenment, history of law: „nullum crimen sin lege, nulla poena sine lege poenali" (1787).

Literature.

Jurisprudence

Concepts: good, evil, right, sense of justice, conscience, character, fairness, ofence of the right; law, jurisprudence, , right doctrine; prehis- tory, antiquity, middle ages, renaissance, new time, morals philosophy; enlightenment, philosophy of rights; modal philosophy; newest time, deontology: order, prohibition, permission, promise, duty, swear, oath.

Modern time, deontic logic: jurisprudence, objectives of rights; body, soul, integrity, freedom; honor, chastity, wealth, domestic peace, peace; order, country, war, environment, nature.

Scope of rights, legal object: nature right, human rights, the animal's rights, rights of plants; civil law, public law, international right, immaterial rights; person, being, community, product, invention; legal protection, protection of laws; outlaw, jurisdiction, legal remedy, legal struggle; constitutional state, dictatorship, police state, military junta; terror, terrorism.

Legal act: dsagreement, quarrel, litigation; case, trial, conciliation, sentence, punishment; legal case, trial, legal capacity, restricted, full, missing; guardianship, guardian, ward, take care; letter of attorney, competency, statute bok, validity.

Legislation, execution: passing law, changing, overturning; legal medicine, legal chemistry, crime chemistry, forensic science; legal sociology.

Commercial law: law of commerce, industrial right, incorporeal right, copyright; agreement, bond, condition, interpretation; exchange, trade, barter, equivalent; exchange against payment, salary, rent, substitute; price, payment, delivery, reception, debt, credit, interest; reimbursement, collection, free, present, delivery; pawn, hostage, pawning, redemption.

Judicial system: eye-witness, witness, proof, alibi; characteristic, ditinctive mark, innocence, liberation; from the right pardon giving up;

succession, transition and transfer of the right.

Condemnation: sentence, decision, absoluteness.

Condemning mistake: innocent condemning, judicial murder, petitioning; legal finality, legal force.

Literature.

History of law

Concepts: right, law, history of law. Prehistory: session stones, customary law, chief of tribe; shamanism, lot, gods, ancestors. Ancient civiliza- tions – law: Babylonia, Hammurapi's law; Greek antiquity – philosophy of law; Roman time – Roman law; Middle ages – Church

law, inquisition; Renaisance – Humanism – Mundane law; New time – philosophy of law; Enlightenment – legal science; Newest time – history of law: Friedrich von Savigny (1779-1861), Karl Eichborn (1781-1854), *People's history*, Leopold von Ranke (1795-1886), Thomas Buckle (1821-1831); Revolution history: Barthold Niebuhr (1776-1831) – social progress, Karl Marx historical materialism, Arnold Toynbee (1852-1883) – industrial revolution. Modern time: Vladimir Lenin: social law.

Literature.

Crime sciences

Concepts: crime lat. crimen, right, sentence, punishment, compensation; criminology, criminalistics, criminal policy; criminal psychology, psychi- atry, psychoanalysis; criminal sociology, social criminology, criminal anthropology; crime science, criminal law, multidisciplinary crime studies.

Crime species: act, crime, offence, renewing; capital offence, sexual crime, verbal crime, crime against property; white-collar crime, community crime, crime against the state.

Capital offence: person crime, murder, manslaughter; assault, violence, deprivation of liberty; offence, torture, war crime.

Sexual crime: adultery, rape, fornication, to child or animal interfering, violation.

Verbal crimet: lie, wrong certificate, falsification, wrong oath; lying, hiding, falling silent; defamation, insult, abuse, threat, blackmail.

Crime against property: theft, treatch, betrayal, fraud, deception, embezzlement, vandalism, destroying, mischief.

White-collar crime: deception, embezzlement, bankruptcy, defalcation, peculation; money forgery, forgery of document, tax offence; debt crime, agreement crimet.

Obligation crime: duty, breaking of duty, breaking of promise, braking of prohibition, ignorance, neglect.

Community crime: disturbance. Crime agains state: espionage, denunciation, treason, traitory. Parties and sharing: factor, victim, guilty, responsible; accomplice, complicity, mutual understanding;

means, feint, mislead, camouflage, pretence; falsification, lure, decoy-duck, frightening, threat, blackmail; persuasion, seduction, compulsion; revenge, blood vengeance, honour murder; penal code, crime curve, punishment curve; motive intent, damage, causing; subject, reason, consequencet. Conditionality, self-defence –emergency: responsibility, irresponsibility, duty, permission, consent, carelessness, endangering.

(abbreviated version) Guilt; Sentence; ... Adolphe Quetelet (1796-1874)- statistics action, *Sur l'homme not, le développement de ses facultés* (1885); Cesare Lombroso (1836-1909)- criminal anthropology, crime as inborn deficiency – atavism *Genio e follia* (1864) „genius and madness", *L'uomo delinquente*(1876) –"criminal human being"; Edwin Sutherland (1883-1950), environmental factors, *Principles of criminology*(1934), *The professional thief* (1937), *White collar crime* (1949), Marx (economic criminology), Reckless (19th c.) – conflict situations and dissolution; Sellin (19th c.). Robert Merton (b. 1910), social behaviourism, *Social theory and social structure* (1949), *Sociology of science* (1973), ..., crime linguistics, cryptology, semiotics, crime sociology, crime anthropology.

Crime as subject of art: crime literature, crime movie, detective novel, police novel, trial novel; Edgar A. Poe (1809-1849) – criminal novel (1843), *The murders in the rue Morgue* (1843); crime which is directed to the works of art; Works of art as. Works of art as crime, pornography literature; works of art which violate religion literature.

Military science and economics

Concepts: war dance, warpaint, war song, war art, ..., peace, conflict, peaceful coexistence, cold war. Henri Jomini (1799-1869)-military history and operations; Karl von Clausewitz (1780-1831) – „total war" –Vom Kriege (1832-34); guerilla warfare – war as extension of political operatins. Arms strategies: Alfred T. Mahan (1840-1914) – strategy of the naval war; Giulio Douhet (1869-1930) – strategy of the air warfare; Bernard Brodie – missile warfare (1959); Herman Kahn (1922-1983) – nuclear warfare (1960), *Thinking of the unthinkable* (1962), *The year 2000* (1967).

Concepts in economics: trade, economy, welth, poverty, ...Aristoteles – household and state care; Thomas of Aquinus (1225-1274) – pulling and the right price; Thomas More (1478-1535) – ideal society, oligarchy, oligopoly – *Utopia* (1516); Adam Smith (1723-1790) – „invisible hand", *Wealth of nations* (1776); Antoine Cournot (1801-1877) – economy as game (1838); Vilfredo Pareto (1848-1923) – theory of economic balance (1916), utility function, zero sum, indifference curve, economic balance and optimum, „Pareto optimum"; nobody can improve without worsening someone else's situation"; Eugen Bohm von Bawerk (1851-1914); capital theory (1884); Francis Edgeworth (1845-1926), agreement, marginal utility, difference curve (1881). Modern time – game theory: Frederik Zeuthen (1888-1959) – collective haggling, theory of duopoly, differentiation of products; Oscar Morgenstern (1902-1977) – game theory (1944). Theory of board games: Emanuel Lasker (1868-1941) – theory of chess; C. L. Benton (20th c.): *Mathematical theory of the Nim game.*

Theory of games of chance

Concepts: game, chance, random, , betting, charge, risk, luck, bad luck, prediction, profecy, dice, roulette, chip, money game, game bank, gambling den, gambling hell, Monte Carlo, Las Vegas. (...) Middle ages, dice throwing, playing cards: Wibold Cambraylainen (c. 960), results of three dice; Richard de Fournival (c. 1200), combinations of several dice; Pseudo-Ovidius (c. 1200), listing alternatives of three dice; 3-partitions of numbers 3-18 – 56 in all – relative number; *De vetula* (1222); Alfonso Viisas (1221-1288), *Libro de juegos*(1283); *Libro de acedrez, dados e tablas* (1283); Girolamo Cardano (1501-1576) „probability"; Galileo Galilei (1564-1642), mathematics of dice throwing; Blaise Pascal (1623-1662), probability in dice play, Christian Huygens (1629-1695), probability in games of chance; Jacob Bernoulli (1654-1705), theory of games of chance, *Ars conjectandi* (1713), combination diagram, „Bernoulli numbers", *The law of large numbers*(1690).

Probability theory and behavioural sciences

Concepts: conditional probability, causality, ignorance about causes, randomness, natural magic, gods, destiny, divination, theology, fatalism. Thomas Bayes (1702-1761), conditional probability; Pierre Laplace (1749-1827), predictability of the world; Marie Ampere (1775-1836), games of chance and players' wealth, *Considérations sur la théorie mathématique du jeu* (1802); Simeon-Denis Poisson (1781-1841), probability calculus, *Recherches sur la probabilité des jugements* (1837).

Concepts in behavioural sciences: instinct, habit, tradition, codes, laws, predicaments, conduct, customs, doctrine, morals, ethics, behaviour, patrology, theology, humanism, philosophy of society, liberalism. Georg H. Mead (1863-1931), interactionism (1928); Kurt Lewin (1890-1947), field psychology (1931); Leo's Festinger (b.1929), cognitive dissonance theory; Fritz Heider (20th c.), interpersonal psychology; naive psychology (1946); Herbert Simon (1916-2001), organisation theory of human being; *Models of man, Decision making and management*; George Karlsson (1958), social mechanism; Dorwin Cartwright (1965), psycho-social network models – group dynamics –structural models (1966).

Management science and operational research

Concepts in management science: administration, organization theory, management, prehistory: shaman, sage, history: divine emperor, king, emperor, senate, patriarch, agrarianism, urbanism, mercantilism, liberalism, bureaucracy. Auguste Ampere (1775-1836), „cybernétique", industrialism, capitalism, imperialism, Norbert Wiener (1894-1964), „Cybernetics or communication and control in man, animal, and machine" (1948), K.R. Andrews (20th c.), „company strategy", Hans I. Ansoff (20th c.), strategic management" (1965), C. West Churchman (b.1916), „management science", Michael E. Porter (b. 1947), „competition strategy", *Competitive analysis* (1980).

Concepts in operational research: situation, decision making, planning, optimization, , logistics, transport, network flow, project management. Natural history; trial and error, learning; cultural history:

instinct; new time: variational calculus; enlightenment: military science; administra- tive, technical science, mathematics. Gaspard Monge (1746-1818), excavation and filling work optimization (1781), Paul Appell (1855-1930) *Le problème géometrique des deblais et remblais* (1928), holonomic and non-holonomic kinematic equations (1889); Ampère (cybernetics, science of government); Robert A. Watson Watt (1892-1973), radar, radar operation, „operational research" (1942), Patrick Blackett (1897-1974); Philip M. Morse (b.1903), submarine warfare, Robert McNamara (b.1916), system thinking; Ivan Getting (b. 1900), „holistic planning"; Frank L. Hitchcock (1875-1957), assignment and distribution problem, *The distribution of product from several sources to numerous localities* (1941). Linear programming: Leonid W. Kantorovitch (1912-1986), transport problem; *The translocation of masses* (1942), linear programming; *Mathematical methods of organization and planning* (1939); Tjalling Koopmans (1910-1985), *A model of transportation* (1951); Harry W. Kuhn (b. 1874) *The Hungarian method for the assignment problem* (1955); Lester R. Ford (1896-1971), *Solving the transportation problem* (&Fulkerson 1956); Delbert R. Fulkerson (1924-1976), network flow problem (1961); Albert W. Tucker (b.1905), combinatorics and game theory; Bernhard Schriver (20th c.), project management; John E. Kelley Jr. (b. 1937), *Project evaluation and review technique* (1959).

Mathematical game theory

Concepts are those already introduced. Emile Borel (1871-1956), strategic games, optimum strategy (1921), minimax theorem of three players' game ; Ernst Zermelo (1871-1953), chess and set theory (1912); John von Neumann (1903-1957), theory of parlour games (1928), *Theory of games and economic behavior* (&Morgenstern 1944); Oscar Morgenstern (1902-1977), mathematical game theory (1944); Philip M. Morse, game theory and warfare; zero-sum games: Georg B. Danzig (b.1914), linear programming and games (1951), optimal mixed strategy (1951); non-zero-sum games: Albert W. Tucker (b.1908), the prisoner's dilemma (1950); Joseph Nash (b.1928), cooperation and negotiation, non-cooperative games, equilibrium (1951); n-person games: Claude Berge (b. 1926), Martin

Shubik (b. 1926), n-person cooperative games (1954); Anatol Rapoport (20th c.), n-person's cooperative games (1970) and non-cooperative games; Lloyd S. Shapley (b. 1923), value theory (1974); computational game theory: Robert Axelrod (20th c.), moral program tournament (1970), evolution and game theory (1979); moral survival game program (Anatol Rapoport, „Tit for Tat"(1979). Moral rules: 1. at first encounter be always ready to cooperate; 2. if your partner deceives, give a teaching immediately; if the partner is ready to try again, forgive him and be ready again. Richard Dawkins (b.1941), „genes and memes" (1976). J. Maynard-Smith (20th c.), evolution and game theory (1984).

Machine intelligence

Natural history: quantity; cultural history: number; prehistory: addition, subtraction; ancient civilizations: numerology, number symbols, counting; antiquity: abacus, letters as number symbols, gematry. Middle ages: hindu-arabic number system; zero, arithmetics, algorithm. Renaissance: clocks, reckoning, logarithm, counting bones; new time: mechanical reckoning; middle ages: proofs of God; Raimundus Lullus (1235-1315), *Ars magna* (1273). Renaissance: logical schemes and machines: Leonardo Fibonacci (c. 1170-1240). Hindu-arabic numbr system, arithmetic, Fibonacci numbers. Mechanical calculator: Gottfried Leibniz (1646-1716), „calculus ratioci- nator", „ars combinatoria". Enlightenment: logical device. Charles Stanhope (1735-1816), *Demonstrator* (1819); Newest time: algebraic logic. George Boole (1815-1864), algebraic logic (1854). Lewis Carroll (1832-1898), logical board (1886), *The game of logic*(1886); John Venn (1834-1923), logical schemes (1880); William Jevons (1835-1882), logical piano (1870); ; John Marquand (1853-1924), logical table-top machine (1885); Charles S. Peirce (1839-1914), logic with electricity (1886). Modern time, switching algebra, theory of computation: Stephen C. Kleene (b.1909), logic machine, automata theory (1936); Alan Turing (1912-1954), universal logic machine, universal computation (1936), „machine intelligence" (1950 Computer, automata, languages: Claude Shannon (1916), switching algebra and theory (1938),

signal theory (1936), automata theory (1936), information theory (1948), coding theory (1948), cryptology (1948). G. H. Mealy (20th c.), arrow model of automata (1955), E. F. Moore (20th c.), state model of automata (1956), Noam Chomsky (b. 1928), mathematical language theory (1956), Arto Salomaa (b. 1934), automata theory (1966), language theory. Programming languages: John von Neumann, stored program principle (1944), computer architecture (1944); Frederick Williams (1911-1977), radar display tube with delay circuit read/write memory (1948), the first universal stored-program computer (1948). Tom Kilburn (b. 1921) Manchester Baby computer (1948), programming language (1948), the first computer program; number theoretical problem and algorithm. Artificial intelligence, Lisp: Norbert Wiener, programming of programming (1948),John McCarthy (b. 1927), artificial intelligence (1956), Lisp (1960) , type theory, list structure, recursive function theory, lambda calculus, functional programming.

Computer games, artificial life

Concepts of computer games (beside those already mentioned): cellular automata, game of life, Nim, draughts, Checkers, chess, Garri Kasparov, „Deep Blue“ (1997) – computer world champion. C.L. Bouton (20th c.) *Mathematical theory of the Nim game* (1901); E. U. Condon (20h c.) *Machine which plays Nim game* (1940); A. L. Samuel (20th c.) – programme which plays draughts (1947); R. Stuart (20th c.) „Nimrod“ (1951); Zoltan Hennyey (20th c.) – „Fan Tan“ (1958). Chess machines: Wolgang von Kempelen (1734-1804) chess playing machine (1769) – fraud – human player inside; Torres y Quevedo (19th c.) – machine playing chess endgames (1890); Emanuel Lasker (1868-1941) – theory of chess (1897); Tihamer Nemes (1895-1960) – electronic chess-playing machine (1949); D. G. Prinz (20th c.) – *Robot Chess* (1952). Computer chess: Konrad Zuse (1910-1995) – chess program – „Schachhirn“ (1945); Claude Shannon (b. 1916) – principles of chess program (1950); Alan Turing (1912-1954) – algorithm for chess playing program (1950); Herbert A. Simon (1916-2001) – *The chess machine* (1955); IPL – language (1956) – chess program (1956), *Chess playing programs and the problem of complexity* (1963); J. Kister (20th c.) – chess program for a 6/6 board (et al. 1957); ; A. Bernstein

(20th c.) – IBM 704 chess program (1958); Alan Kotok (20th c.) Lisp language chess prog- ram (19620; Adelson-Velski (20th c.) Russian „Kaissa" programme (1966); Richard Greenblatt (20th c.) – „Mac Hac" program (1966); John McCarthy (b.1927) – betting (1968) – „machine will beat man in chess within 10 years", it took however 29 years as it occurred first in 1997; David Levy (20th c.) – betting that „machine will not win" (1968); Mihail M. Botvinnik (1911-1995) – theory of machine chess, *Computers, chess and long-range planning* (1970); M. Newborn (20th c.)-computer chess tournament (1970); Adelson-Velski (20th c.) – public match in computer chess (1971); J. J. Gilloghy (20th c.) – „Tech" programme – „brute force" (1972); A. Zobrist (20th c.) – description language for chess (1973); Kenneth Thompson (b. 1943) – „Chess is a chip" (1980). World computer chess championshipsheld since 1974 in Stockholm Kaissa; 1977 Toronto – Chess 4.6; 1980 Linz-Belle-Chaos draw; 1983 New York – Cray Blitz; 1986 Cologne Cray Blitz-Hitech – draw; 1989 – Edmonton – Deep Though; 1992 – Deep Thought 2; 1995 Hong Kong – Deep Bluet. World microcomputer chess championship (WMCC) – held since 1982. World champion – computer_ Garri Kasparov (b. 1963) – first match against computer (1985); „Deep Blue" – Kasparov won 4/6 (1996); „Deep Blue" rematch (1997) – machine bet Kasparov 2/1-3/6.

Computer and go: B.Rudiger (20th c.) – „Das Go-Spiel" (1920); A.L.Zobrist (20th c.) – Go playing program (1960)

Concepts in artificial life: Konrad Zuse – cellular automaton (1939); Stanislaw Ulam (1909-1984) – cellular automata programming (1942); Theory of self-reproducing automata: John von Neumann (1903-1957) – principle of the programming (1944), theory of self-reproducing automata (1944), mathematical game theory (1948); Stephen Wolfram (b.1959) – classification of cellular automata (1983) (equivalent to Chomsky's classification of languages and grammars; Davi Griffeath (the 1980's) – tuning cellular automata theory. Game of lige: John H.Conway (20th c) – game of life (1970); Manfred Eigen (b.1927) – hypercycle theory (1968); Humberto Maturana (b.1928) autopoietic systems' (1973); Francesco Varela (1946-2001) – autopoi-etic systems programming. Artificial life, Christopher Langion (20th c) – Artificial life (1987).

CHAPTER XI
GAME AND PLAY IN A SYNTHESIS
Game and play looking for their signs

Wittgenstein's warning (in **Philosophical investigations**):

Let us consider the activities we call games. I refer to the scenic games, to games with cards, to games with the ball, to olympic games etc. Don't say: They should have something in common, because we call them with the same word. Check whether they really have something in common.

Wittgenstein's challenge still remains unanswered. More exactly, it seems that there is no common denominator for the great variety of acti-vities we call games. To prove this is one of the main aims of this book. As a matter of fact, 'game' corresponds, in French, to 'jeu', which can also mean 'play', which, in its turn, may also mean 'spectacle'. Various old terms for game: paidia (freedom, improvisation, vivacity, noise, uncontrolled lough, mainly associated with childhood); ludus (game with the taste of practical difficulty), agon (competition involving physical or intellectual agility and force), scholazein (vacancy, free time), diagoge (dissipation), ilinx (game with high risk). In many languages, there is no generic term equivalent to the French 'jeu'.

From Plato to Cardano and from Cardano to Caillois and Brams

For Plato, game (as equivalent of 'paidia') is something involving neither utility, nor truth, neither term of comparison, nor damage; can be best appreciated for its grace ('chari') and for the pleasure we get from it. Such a satisfaction implying neither material advantages, nor damages, is a game „paidia". Obviously, Plato has in view the case in which we are free to decide whether to play or not a certain game. Plato stresses the aesthetic aspect of a game ('grace'), its virtue to become a world in itself, i.e., independent of the current everyday life (*neither term of comparison, nor damage*) and of its system of values (*involving neither utility, nor truth, ..., neither material advantage* ...).

The only source of pleasure is the intrinsic nature of the game. But, in this way, the possibility to evaluate the performance of a game and, as a consequence, to make a hierarchy of the players, i.e., to put them in competition and to give them material prizes will brake the game.

The conscious practice of games is very old and it was concerned mainly with games of pure chance. But the scientific investigation of the games of pure chance begins only in the XVIth century, with G. Cardano (1565) and continues with Galileo Galilei (1642), Christian Huygens (1657), Blaise Pascal (1657) and Pierre Fermat (XVIIth century), Jacques Bernoulli (in Ars Conjectandi 1713). G. Leibniz (in a letter to Jacques Bernoulli 1704) proposes a classification of games in three categories: of pure chance, of semi-chance and of intelligence. The works related to the mathematical study of the games of pure chance are at the roots of the mathematical theory of probability. In the XXth century, Emile Borel proposes a mathematical theory of the game of bridge; he is also the author of *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes* (Gallimard, Paris, 1941) and *Le hasard* (Presses Universitaires de France, Paris, 1948). Already at the beginning of the XXth century, Emile Borel is the author of an important concept of randomness, under the name of 'normal number'; it is a real number whose decimal expansion involves each decimal from 0 to 9, with the same probability of appearance. The basic theorem in this respect asserts that almost all real numbers are normal (i.e., the non-normal numbers form a negligible set of Lebesgue measure zero). Renée de Possel, 1936: *Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de reflexion.* Johan Huizinga, 1938: Homo ludens (in Dutch), the first general and systematic picture of the social function of games. For Huizinga, in one of his attempts to define it, the game is a voluntary action or activity, conceived as an aim in itself, done in certain fixed limits in space and in time, according to a freely agreed rule, becoming obligatory; this activity is associated with a state of tension, of joy and of the consciousness to be something different from the current everyday life.

John von Neumann and Oscar Morgenstern (1944) *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press. The first mathematical strategic perspective in the study of games. It is con-

cerned with the choice of a decision among several possible decisions, under conditions of a competitive situation, including both cooperative and conflictual aspects and facing various rational factors. A strategic game is a situation involving several players who successively and independently, in a definite order and under specified conditions, choose a decision among several possible decisions.

Roger Caillois: *Les jeux et les hommes* (Gallimard, Pais, 1958) identifies some features of a game: free (to play or not a specific game), separated (by a priori fixed spatial and temporal limits), imprevisible (the result is determined by the behavior of the players), improductive (the game does not produce goods), directed by some rules (which are the only ones valid during the game), fictious (specific consciousness of a second reality or of a pure irreality in respect to the current life). He also proposed a classification of games in four categories: of competition, of pure chance, of simulation and of maxim risk. However, neither the list of features, nor the list of four types of games succeed to cover the whole complexity and variety of games, as it is shown in this book.

Pierre Guiraud (*Les jeux de mots*, Presses Universitaires de France, Paris, 1976): a game is a physical or mental activity, purely gratuitous, based generally on convention or on fiction, having, in the consciousness of the player, no aim other than to play the respective game and to extract the pleasure exclusively from this participation. Features: gratuitousness, futility, benignity, facility. Neither the definition, nor the list of features cover the whole complexity and variety of games.

Steven J. Brams: *Game theory and politics*, Free Press, New York, 1975; *Paradoxes in politics*, Free Press, New York, 1976; *Biblical games: a strategic analysis of stories in the old testament*, M.I.T. Press, Cambridg Mass., 1980.

Typology of games. Gameness may be a matter of degree

Game is too rich to can be captured, in all its aspects, in a definition of reasonable length. Instead, we can try to approximate it by means of a binary matrix, associating each column with a specific activity supposed to be a game or a play and each line with a possible feature of a game or a play. The following rules are respected: each feature belongs

to at least one activity in the list; each activity possesses at least one feature in the list. We realize that: no feature belongs to all activities in the list; no activity possesses all features in the list.

Let us associate successive columns to the following activities: dice, life, chess, economics, bible narratives, rituals, computer algorithms, science, swing, masquerade, theatre. Let us associate successive lines to the following features: chance, freedom, restricted space, restricted time, intelligence, strategy, problematic, imprevisible, competition, vertigo, alternative world, simulation, sacrality, scenic representation, high risk. At the interference of line k with column h we put 1 if the k-th feature belongs to the h-th activity and we put 0 in the contrary case. We get on first line the binary string 11010001000, on the second line we get 10100011111, on third line 10110110111., on fourth line 00110110101, on fifth line 00111011001, on sixth line 01111011001, on seventh line 00110011000, on eighth line 11111001000, on nineth line 00110001000, on tenth line 01001101111, on eleventh line 00101101111, on twelveth line 00000001011, on thirteenth line111011011011, on fourteenth line 00001100111 and on fifteenth line 01000000000.

As a matter of fact, in most cases weights between 0 and 1 should replace the binary code, because most features belong to various games to some extent only. This is one more reason to consider gameness a matter of degree. But the main source of this relativity of gameness is the fact that no activity has all the possible features of a game and no feature belongs to all activities which deserve to be considered games. So, there is a whole typology of gameness. Pure game is a limit case, most life-situations are a mixture of game and non-game, so non-game too is a limit case.

Game as antinomy

The game is a way to obtain a state of relaxation, by enterring a world different from the everyday life; but, at the same time, it involves a state of tension, of concentration required by the need to follow with great attention its rules and to use them in the best possible way.

The game is an expression of freedom; freedom to decide whether to play or not a specific game (when this is possible, because there are games in which we are involved in absence of our will and/or of our

awarness) and, once involved in a game, freedom to play it with the right to choose variou variants, the right to fail in this choice, the right to commit mistakes. But at the same time the player has the obligation to follow the rules of the game and, when this is the case, to follow the metarules imposed by the respective professional organization (federation).

The game should find its motivation in itself, far from any utility, from any material gain, it should be gratuitous; but, at the same time, by its competitive dimension, it becomes associated with prizes and glory, stimulating the desire to play for money and other material advantages.

The game is individual in its very nature, even in cases when you play in a team, because it corresponds to an individual need to express in freedom your creativity; but, at the same time, you are involved in the collective life of those playing the same game, in the respective profesional organization.

In a lot of games, such as those of simulation, theatrical performances, masquerade, disguise, masks the player is dominated by the trend to be another one, to change its identity; but, at the same time, the player is dominated by the desire to be itself at least at a metalevel, in the way it is able to be another one.

In most games there is a trend towards routine and mechanical behavior, determined by the commodity to use the rules of the game in a quasi spontaneous way. This fact brings the game in the immediate neighbourhood of an algorithm. On the other hand, there is the opposite trend towards singularity, expressed by the desire to use the rules in a personal, creative manner.

The preceding antinomy leads immediately to another one: the potential creativity resulting from the personal use of the rules of the game and the potential routine, resulting from a mechanical, algorithmic use of the rules. Between these two opposite challenges, the player tries to reach a position as near as possible to the creative one.

Activities whose status of game is socially recognized involve a state of awarness of te player, who is conscious of his involvement in the game. Typical examples are chess, tennis, crosswords, bridge, football. They differ in respect to the number of partners: zero, in the case of crosswords, one, in the case of chess, several, in the case of bridge or

of football. On the other hand, we are involved in a lot of games, such as the biological game of heredity and survival, the social game of human relations, the linguistic game of our mother tongue, the ecological game etc.; in all these cases either we are not aware of the game we are playing or we become aware of it only partially, by learning and experience.

There is, in many games, a link with higher levels of spirituality, whose best illustration is just our relation with God. Remember that the Bible has a reading in terms of a strategic game, due to S. Brams. On the other hand, there is a risk, for any game, to fall in derisory, when it looses any creative and any aesthetic value.

Associated with the preceding antinomy, the player tries to make of his opponent his toy, but, on the other hand, there is, for the player, a trend to become a toy of Divinity.

In most games, the player is fighting with one or more other players. However, irrespective the number of partners, the player is fighting also with himself, trying to improve his behavior in respect to his past behavior.

Two conflicting trends challenge a player, a trend of optimization, very clear in gymnastics and athletism, and a trend towards compromise, very visible in the strategic side of games.

The player of a game leaves the real life for an alternative one, having an aesthetic dimension, while concomitantly, just by this transfer, the player finds out a way to discover the true, deep meaning of his real life.

The game of science and the game of life

Science can be conceived in two ways: a) as a need to understand the world; this is its cognitive function; b) as a need to modify the world in the right direction; this is its utilitarian function.

Game is mainly involved in the cognitive function of science. In this respect, there is no essential difference between science and music or between poetry and science. Indeed, music and poetry cannot be conceived in absence of their ludic component, while the aesthetic factor in science is not a peripheral, but a central one. See, for instance, John H. Conway (quoted in Joel Spencer, *Geek Chic*, Notices of the American Mathematical Society, february 2001, p. 165): *It's a thing*

that nonmathematicians don't realize. Mathematics is actually an aesthetic subject almost entirely Conway quotes G. H. Hardy *(A mathematician's apology): mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful; the ideas, like the colors or the words, must fit together in a harmonious way.*

The link between the cognitive function and the utilitarian function of science is mainly directed by the following principle: The most successful utilitarian results of science are those which follow from the natural historical development of the cognitve function. *Cognitive* and *utilitarian* may be separated by days, by months, by years, by decades, by centuries or by millennia; regularly, science is a long distance enterprise.

The specific nature of the game involved in scientific research is the fact that, in contrast with tennis or chess, the dominant aspect is no longer given by restrictions under the form of rules, but by the freedom to follow the way of our curiosity and of our intuition. In other words, the game of science follows from the right to try again and again, in various ways, to answer questions raised by human curiosity, in direct continuation of children's curiosity. But this right implies two other rights: the right to fail again and again and the right to commit mistakes. 'Errare' means in Latin to move here and there, in complete freedom, and it is at the etymological source of 'error'. A Latin proverb says: *Errare humanus est; perseverare diabolicum.* However, in science we can commit mistake after mistake and this is the symptom of a normal development of the game of science; the Latin proverb refers to the repetition of the same mistake. The game of science does not have explicit rules; if some implicit rules could be formulated, this is up to its players. But it may happen that each player, i.e., each researcher has its specific way to formulate these rules. The freedom of the game of science is like the freedom of artistic creativity and it cannot be separated from its success; the former is a necessary condition of the latter. It is mainly a freedom of choice and of intellectual adventure, implying intellectual vertigo and intellectual climax.

A lot of examples show that many, if not most high performances in scientific research have some mistakes at their source. It seems that the natural way towards creativity cannot avoid the mistake.

The game of scientific creativity is in many respects different from

the usual games. It is not only devoid of explicit rules, it is also devoid of spatial and temporal restrictions. Like the game of artistic creativity, it is mainly the effect of our need to explore in freedom the secrets around us and in us and to transform this exploration in one of the major sources of pleasure and of meaning of life.

°

John Conway's game of life (1982) is a cellular automaton simulating self-reproduction. The general theory of cellular automata was given by John von Neumann (*The general and logical theory of automata*, Cam- bridge, M.I.T. Press, 1948). Conway's automaton has two states: 0 (death) and 1 (life); it works in a planar space decomposed in squares, where cells are located. Two rules define its behavior: Rule 1: A dead cell becomes alive (i.e., 0 becomes 1) exactly when in the eight neighbor squares there are three alive cells; Rule 2: An alive cell survives if and only if it has two or three neighbor alive cells. The idea behind this automaton is that both overpopulation and isolation lead to death. A population (i.e., a set of cells) has three possibilities: disappearance, expansion and cyclic behavior

Conway's game can also be played by ignoring its cognitive function; just for the sake of its gameness.

From gratuite to cognitive and from cognitive to utilitarian

A child invented a game with pieces with different colors: two of them were blue, two yellow, two red and two green. He arranged them in the following way: GBYBRGYR, where G = green, B = blue, Y = yellow and R = red. Then his father (whose name was Langford) came and tried to disturb this order, but the child became nervous. The father tried to understand the rule and, in this respect, he codified the colors in the following way: B – 1, R – 2, Y – 3, G – 4 and the string of collors became 41312432, where the rule is clear: between two different occurrences of i (i = 1, 2, 3, 4) there are exactly i intermediate positions. Try to find other such Langford strings over the alphabet {1, 2, 3, 4}, then try to find such strings over the alphabet from 1 to 5 etc. This is the ludic aspect of Langford strings. Continuing to play and starting from a finite string including no repetition we can form a kind of Langford string by concatenation with its mirror image. For

instance, starting from *ab*, its mirror image (i.e., its reversal) is *ba* and by concatenating them we get the string *abba*, where, for a = 2 and *b* = 0, we get 2002; here, the Langford condition is satisfied for i = 0 and *i* = 2. If we start with *bac*, we get *baccab*, where for *c* = 0, *a* = 2, and *b* = 4 we get again an extension of a Langford string. Such strings which are identical with their reversal are said to be *palyndromic*. It is easy to see that pieces in chess, in their initial position, lead also, by right numerical codification, to a Langford string using only even numbers.

The mathematical investigation of Langford strings and their extensions became a very interesting topic in combinatorics and in formal languages. This is the cognitive aspect of Langford strings, but we have already seen that the border separating it from the ludic one is very fuzzy.

In 1960, A. R. Eckler (*The construction of missile guidance codes resistant to random interference*, Bell System Technical Journal 39, 1960, 973-947) showed that Langford strings are very useful in the construction of codes facing random interference. This fact involved both the cognitive and the utilitarian aspect of Langford strings. But Eckler was also guided by the cognitive game of his own curiosity and in this respect he joins both the child Langford and Langford the father.

Game as metaphor and the metaphors of the game

Here are some expressions from sport games used as metaphors:. The prime minister was made knock-out by th president, who showed him the red card. The opposition leader was left in off-side. He failed in this talk on the last hundred metters.

The world scene became a foot-ball game looking for the right referee. Language is a chess-game (F. de Saussure). God does not play dice (Albert Einstein). The world is a scene (one of Shakespeare's characters). G. Evelyn Hutchinson: *The ecological theater and the evolutionary play* (Yale Univ. Press, New Haven, Conn., 1965). Iolanda Lalu: *Balance and game in the study of theatre* (Poetics 6, 1977, 351-374).

Characters, conflicts, scenarios, strategies, paradox and imprevisibility in science

Euclid's geometry and Eschil's tragedies are both worlds of fiction.

Problems in the former corresponds to conflicts in the latter. Basic objects in the former corresponds to characters in the latter. Theorems in the former correspond to the action in the latter. Non-Euclidean geometries in science correspond to various ways to transgress classical logic in art and literature. Anti-intuitive facts in science correspond to paradoxical situations in art and literature. Cognitive models in science correspond to different scenarios in film. Fractal geometry in science correspond to the aesthetics of the ugly in poetry. The conflictual nature of the cognitive models in science corresponds to the conflictual nature of a theatrical play. The increasing conflict with the common sense is visible in both the contemporary science and the contemporary art. The 'vertical montage' of the mathematical language (resulting from the concomitancy of various codes, of various heterogeneous means, such as natural language, artificial symbols, diagrams, tables, computer programs etc.) coresponds to Eisenstein's vertical montage in film.

The chicken game and the game without end

Two drivers drive their cars with great speed on the same central line of the road, but in opposite directions, i.e., each of them against the other. The collision becomes unavoidable ... if at least one of them does not deviate his car. The first who will do it will be considered the looser (and the other the winner) in a game called the chicken game (due to their habit to leave the road in the last moment before the approaching car could kill them). Each driver has to choose between two strategies, but the interesting fact is the antinomic nature of each of them. The wise strategy, protecting the life of both drivers, is just the loosing strategy, while the risky strategy is just th winning one. However, there is also a third strategy, a cooperative one: the drivers may accept, by a previous agreement, to deviate simultaneously their cars.

This game is both a metaphor and a metonymy of many life situations, at various social levels.

•

Two persons decide to play a linguistic game, in which each statement means its negation. For instance, *I agree* means *I disagree.* At some moment, one of the players says: *Let stop the game.* The other player is

in a dilemma. If the message of his partner belongs to the game, then it means: *Let continue the game.* If however the respective statement is a meta-statement, a statement which no longer belongs to the game, then it should be interpreted *ad litteram* and the game should be stopped.

This game is a metaphor of the political life during communism in Eastern Europe. The dictatorship discourse and the newspapers spoke on the *golden age of the Romanian history*, while the basic human needs were not satisfied, the misery being very visible everywhere. When, after the fall of the communism, some journalists proposed to stop the game of lie, it was not clear whether this statement belonged or not to the old game. In view of the habit and of the inertia, the old game of lie continued to a large extent.

Game as freedom versus game as rule

Traditionally, one speaks of „the rule of the game", suggesting that the latter is not possible in absence of the former. However, the game of scientific or artistic creativity involves neither explicit rules, nor explicit spatial or temporal restrictions. Any attempt to violate this fact leads to the cancellation of the game of creativity or to its marginalization. The game of intellectual creativity consists mainly of the freedom to follow the direction of our curiosity and of our wonder, related to our need to understand the world around us and the world in us. This direction can be chenged at any time, with no fear of punishment for our failures and our mistakes. Although indirectly such activities may receive a competitive aspect, there is usually no direct involvement of this type. So, the danger to distroy their gameness is much smaller than in the case of games explicitly based on rules, where the competitive aspect including material advantages becomes unavoidable and leads almost to the cancellation of the ludic dimension.

The main aim of this book was to call attention on these facts. Otherwise, the understanding of the very nature of the game remains an open problem and no possibility seems to exist to propose for it a definition of reasonable length. Any short definition leaves aside some important games and any generally recognized game leaves aside some features essential for other games. Wittgenstein's warning is still valid.

SUMMARY

Preface 13

Chapter I. THE GAME, UNDER RADIOGRAPHY
Wittgenstein's skepticism 15
A short history 16
'Paidia' and 'ludus' 17
Types of thinking in games 18
Tudor Arghezi and the crosswords 19
The combinatory power of letters 20
Three kinds of word games 22
Substitution games 23
Concatenation games 24
Games of inclusion 25
Ambiguity and slip 27
Word games in a synthesis 28
A first definition of the game, according to Huizinga 29
A pluridimensional space of games 30
The world of game, between synergy and conflict 31
Games we enter against our will 33
Game as stage play 35
The metaphors of the game are themselves games 36
Game and culture in Huizinga's approach 38
The game as a component of science 39
From discovery to invention and from invention to game 41
The conflictual structure of the cognitive model 42
The double face of the games; knowledge and gratuitousness 43
Conway and von Neumann in a cultural perspective 44
The freedom is the essence of game 46
Game as freedom, in science 48
The mistake, as a price of creativity 49
The state of dizziness in science 51
Gratuitousness, constraint and spectacle in the game of science 53
In the labyrinth of signs, with Umberto Eco 55

Chapter II. GOOOOOOOOOL ! FOOT-BALL, THE KING OF SPORTS
Foot-ball as metaphor 59
From foot-ball to the Romanian 'fotbal' 61
The foot-ball in the totalitarian regime 62
The case of Harald Bohr 63
Theoretical preliminaries 64
Complexity and fineness 66
The foot-ball, between order and randomness 67
Violence and strategy 69
Orphans of referee and of terapist, we take foot-ball as a refuge 70
The paradox of classifications 72

Chapter III. PARADOXICAL GAMES
Paradox as a game 74
The chicken game 75
The price of the suspicion 77
The test surprise 80
The game without end 82
Rules and metarules 84
The principle of included middle 87
Electra paradox 90
La Rochefoucauld, Unamuno and Ralea 94
Gr. C. Moisil's paradoxical reflections and suggestions of paradoxes 94
Paradoxical situations in Eugène Ionesco's "La cantatrice chauve" 97
Questions and answers 100
On the uncertainty principle 100
The paradox of desire 101
Paradox and error 102
The paradox of omnipotence 102
The antinomy of the visitor of a castle 104
The imaginary hotel 104
A misleading book 105
Another misleading book 106
Two kinds of adjectives 106
Prothagoras and the young advocate 107

The prisoner's dilemma 107
A paradox which is not an antinomy 108
A controversy between Gardner and Hughes Brecht 108
Two face to face mirrors 109
The paradox of the bulb 109
The series with positive terms. Achille and the tortoise 110
The paradox of obligation and permission 111
Retorts in *Alice in Wonderland* 111
A paradox of induction 111
A geographic paradox 113
The truth as paradox 113
Paradoxes of selfdeception 113
A question raised by N. Rashevsky 114

Chapter IV. IN THE WORLD OF CHESS
Is chess mathematics ? 115
Deduction is the main thing neither in mathematics nor in chess 116
Between Hermann Hesse and Gr. T. Moisil 117
Chess and artificial intelligence 118
From Shannon to Botvinnik 118
Chess as a formal system 120
Is chess thinking sequential or bidimensional ? 122
Language and chess 123
Horizontal-vertical and diagonal 125
The transgression of the opposition between perpendicular and diagonal ..126
The knight - a problem of fineness 127
The pawns, a compromise between rook and queen 128
An attempt of axiomatization 129
Beyond logic and combinatorial 130
Mathematical thinking in chess 131
The computational chess 132
Chess, at the international congresses of cybernetics 133
Two important events 134
The wager with the machine's intelligence 135
The first strategy of Shannon 136
Computational performances in the game of middle 137

When will be the computer a great master ? 138
The day of 11 May 1997 139

Chapter V. THE GAMES OF THE RANDOMNESS
The birth of probability theory 141
From Chevalier de Méré to Pascal and Fermat 142
It may be only one step from expectation to surprise 143
Plausible, but false; correct, but strange 143
From Bernoulli to Poincaré 144
"A physicist is a player which evaluates his chances" 146
Mathematics at lotto 147
The fascination of lottery 148

Chapter VI. THE SPORTIVE SIDE OF ELEMENTARY MATHEMATICS
We don't miss talented students 154
The Cuculescu style 155
Mathematics at chronometer 157
In absence of imagination, we overbid our memory 158
The science and the art to raise questions 159
How does it look a problem for Olympiad ? 160
Can we measure the mathematical performance ? 162
Is mathematics of a competitive nature ? 163
From competition problems to real problems 164
The olympiads 165
Mathematics and sport 167

Chapter VII. SCHOOL MATHEMATICS, BETWEEN LUDIC, COGNITIVE AND UTILITARIAN
Challenging Euclid 170
Towards a science available for (almost) everybody 172
The quarell of "modern mathematics" 175
Mathematics challanges the physicist 178
The utility of the gratuitousness 181
Geometry, don't leave ! 184
René Thom about rigor 187
In what consists the crisis of mathematics ? 191

To be aware of the need of mathematics 191
Human intelligence and the formation of mathematical thinking 194
Attention to the computer ! 195
Dangers in the use of computers 196
The ludic training anticipates the algorithmic thinking 197

Chapter VIII. A NEIGHBOR (AND SISTER) OF TE GAME: THE MISTAKE
Three kinds of mistakes 199
Mistake and error 201
Can we measure the gravity of a mistake ? 201
Correct results obtained by incorrect operations 202
Mistakes suggesting new theorems 203
Famous mistakes 205
A theory born from the observation of a mistake 206
Lebesgue's mistake under radiography 207
Alexandru Froda's book about mathematical errors 208
The frequency of mistakes and the fight against them 210
Does mathematics become an experimental science ? 211
A bet proposed by J. L. Doob 213
The therapy of mistakes 215
Mistakes in learning and mistakes in research 216
Benign printing mistakes 218
How do we add two fractions ? 220
Where is the mistake ? 221
Algebraic jugglery 222
From the mistakes of the students to the mistakes of the masters 224
A satire by Barbilian addressing the dilettantes 225
Anecdotic aspects 226
Traps of exponents and of logarithms 228
Inequalities with and without modules 229
Euclid's thinking 230
A commentary by Barbilian 231
Distortion of Euclid's argument 233
Is the curve a geometric concept ? 234
"Is geometry a science ?" 236

Traps of the tangent 238
Where disappeared the lion ? 239
A problem with a bred 240
Ion Creangă's problem with five breds 241
The hidden infinity 241
Can 2 be equal to 4 ? 242
"Any triangle is equilateral" 242
"Any triangle is rectangle" 243
A pair of straight lines is a hyperbola 243
Abuse of induction 243
Is sin 2x = 2 sin x ? 244
2 = 3 = 4 = ... = n ? 244
The number *e* between 1 and infinite 245
An apparent anomaly about the length of curves 245
For amusement 247

Chapter IX. THE GRAMMAR OF TENNIS GAME
Competence and performance in tennis 249
The alphabet of the tennis game 250
The infinite language of tennis 251
Grammars and automata of tennis 253

Capitolul X (Jouko Seppänen): GAME, PLAY AND THEIR HISTORY
Concepts 256
Conceptual periodization 257
Prehistory – natural and cultural history 258
Ancient civilisations – art of warfare, Greek antiquity – military history 259
Renaissance – art and literature; new time, diplomacy, diplomatics 259
Enlightenment, politics, political science 260
History and philosophy of rights 261
Jurisprudence 261

History of law 262
Crime sciences 263
Military science and economics 264
Theory of games of chance 265
Probability theory and behavioural sciences 266
Management science and operational research 266
Mathematical game theory 267
Machine intelligence 268
Computer games, artificial life 269

Capitolul XI. GAME AND PLAY IN A SYNTHESIS

Game and play looking for their signs 271
From Plato to Cardano and from Cardano to Caillois and Brams 271
Typology of games. Gameness may be a matter of degree 273
Game as antinomy 274
The game of science and the game of life 276
From gratuite to cognitive and from cognitive to utilitarian 278
Game as metaphor and the metaphors of the game 279
Characters, conflicts, scenarios, strategies, paradox and imprevisibility in science 279
The chicken game and the game without end 279
Game as freedom versus game as rule 281

CICERO GRUP tel. 021/312.15.74 fax:021/312.01.28

Urmându-se o veche tradiție, jocul a fost mereu considerat în primul rând prin raportare la regulile care-i stau la bază. S-a pus astfel accentul pe latura sa restrictivă. Totuși, jocul este, înainte de toate, o manifestare a libertății. Nu este vorba numai de libertatea de a decide dacă să intrăm sau nu într-un anumit joc (în cele mai importante jocuri, nici măcar nu intrăm de bunăvoie), ci și (de fapt, în primul rând) de libertatea din interiorul jocului. Este nevoia ființei umane (și a gândului) de a hoinări în direcții stabilite numai de curiozitatea si de imaginația sa și fără teamă că esecurile îi vor fi pedepsite. Acesta este jocul major în care-și au sursa cultura și creația. Regulile sale, dacă există, nu sunt formulate de la început, ca la tenis sau la șah, ci descoperite eventual pe parcurs.

Autorul acestei cărți s-a făcut cunoscut lumii științifice prin cercetările sale de analiză matematică, lingvistică, poetică, informatică teoretică, semiotică, filozofie și istoria științei, iar publicului românesc prin cărți ca: *Poetica matematică; Timpul; Paradoxul; Artă și știință; Șocul matematicii; Invenție și descoperire; Provocarea științei; Noțiuni de analiză matematică; Lingvistică matematică; Din gândirea matematică românească; Controverse în știință și inginerie.*

editura SCRIPTA

ISBN 973-8238-13-7